BIBLIOTHECA UNIV. IAGELL. CRACOVIENSIS
kat. komp.
56292
I
1
Mag. St. Dr

Виленская Публичная
БИБЛИОТЕКА.
Ж XIX 7
Dq 111



56292
I

Mat. 1142/a. Vol 43

GEOMETRYA

DLA

SZKOŁ NARODOWYCH.

CZĘŚĆ I.

BIBLIOTEKA JAGELLONSKA

Cena oprawney w papier Zł. 3. gro. 15.

W Drukarni Nadworney J. K. Mci

Roku 1780.

z Sprowadzenia 1762

56292
I

Dzieło: *Geometrya*, ułożone przez J. P. Lhuilier Obywatela Geneweńskiego, w Towarzyſtwo Nauk w tymże Mieście uſtanowione policzonego, które za ogłoſzonym w Polſzcze, i obcych kraiach Uczonych do piſania wezwaniem, z pomiędzy innych, potwierdzenie i nagrodę odebrało, od Towarzyſtwa do Kſiąg Elementarnych roſtrząśnione, a przez J. X. Gawrońſkiego Kanonika Koadjutora Krakowſkiego Lektora J.K. Mci i w tymże Towarzyſtwie zaſiadaiącego, na Polſki ięzyk z Francuſkiego przełożone, Szkołom Narodowym do użycia podług przepiſów naſzych podaiemy. W Warſzawie dnia 30. Października Roku 1780.

JGNACY Xżę MASSALSKI Biſkup Wil. Prezy;
MICHAŁ Xżę PONIATOWSKI Biſkup Płocki.
AUGUST Xżę SUŁKOWSKI Wwda Kaliſki.
JOACHIM CHREPTOWICZ Podkan. W.X.L.
MICHAŁ MNISZECH Sekretarz W. L.
HYACYNT MAŁACHOWSKI Referen: Kor.
JGNACY POTOCKI Piſarz W. W. X. L.
ADAM Xżę CZARTORYSKI Gene. Ziem. Po
JĘDRZEY MOKRONOSKI G. Ins. Woy K
STANISŁAW Xżę PONIATOWSKI G. Lieut W. K.
FRANCISZEK BIELINSKI Stta Czerſki
ANDRZEY ZAMOYSKI Kaw. Or. Orła Bia.



ZBIOR RZECZY ZAWARTYCH W ROZDZIAŁACH TEY KSIĘGI.

ROZDZIAŁ I.

Wiadomości początkowe o Liniiach prostych, o Obwodzie koła; i o Kątach, - - - Karta. 1.

ROZDZIAŁ II.

O przystawaniu Troykątów, z przystosowaniem do rozwiązania wielu Zagadnień. - - - - 15

ROZDZIAŁ III.

O Liniach równoodległych, i o Równoległobokach - - - - 42.

ROZDZIAŁ IV.

O Kątach w Figurach prostokreślnych, a w szczególności w Troykątach - 52.

ROZDZIAŁ V.

O Równoległobokach, i Troykątach równych co do Powierzchni; i o zamienieniu iakiekolwiek Figury prostokreślney, na Tróykąt, i na Równoległobok 63.

Przy-

Przyſtoſowanie o Rozdziałów naſtępu iących.

O podnieſieniu liczby do Kwadratu, i wyciągnieniu z niey pierwiaſtku Kwadratowego - - - 87.

ROZDZIAŁ VI.

O Dodawaniu, i odeymowaniu Kwadratów, i zamienianiu ich, na iakiekolwiek Figury proſtokreślne - - 120.

ROZDZIAŁ VII.

O Liniach ſtycznych z kołem; o Kątach przy okręgu Koła; i o Kątach, których wierzchołki ſą między okręgiem, albo za okręgiem - - - 145.

ROZDZIAŁ VIII.

Wſtęp do Proporcyi, przez przykłady Geometryczne, z przyſtoſowaniem w ſzczegulności do Troykątów podobnych, a w ogulności do innych Figur proſtokreślnych, także podobnych - - 167.

ROZDZIAŁ IX.

O ſtoſunkach powierzchni Figur proſtokreślnych, w ogulności, a w ſzczegulności o ſtoſunkach Figur podobnych 204

ROZDZIAŁ X.

O Wielokątach foremnych - 261.

Wſtęp

Wstęp do Rozdziałów XI, i XII.

O używaniu Przenośnika, Cerkla proporcyonalnego, i o podziale nazwanym *Nonniuszem* - - - 274.

ROZDZIAŁ XI.

Pierwsze początki Miernictwa - 291.

Przygotowanie do Rozdziału następuiącego.

O Logarytmach - - 313

ROZDZIAŁ XII.

O Trygonometryi - - 334

PRZYDATEK I.

Przystosowania Trygonometryi do różnych działań na gruncie. - 375.

PRZYDATEK II.

Pierwsze początki równoważenia.

ROZDZIAŁ XIII

O kwadratowaniu koła, czyli o wynalezieniu Powierzchni Koła - 405.

Przestroga. w Tablicy XIX. Fig. 5. Litera A. tam być powinna, gdzie iest B. a Litera B tam, gdzie iest A.

ZBIOR

ZBIOR SŁOW POLSKICH,

Albo nowych, albo mniey znanych użytych w tey Kśiędze, z przydanemi obok słowami Łacińskiemi toż samo w używaniu Matematyków znaczącemi. *

Bezśrednie *Immediatè*
Bok *Latus*
Cecha *Characteriſtica*
Celowniki *Dioptræ*
Cienciwa *Chorda*
Czworokąt *Quadrilaterum*
Dopełnienie *Complementum*
Dostawa *Cosinus*
Dosieczna *Cosecans*
Dostyczna *Cotangens*
Dowodzenie *Demonſtratio*
Foremny *Regularis*
Jłość *Quantitas*
Kąt *Angulus*
Kąt ostry *Angulus acutus*
Kąt prosty *Angulus rectus*
Kąt rostwarty *Angulus obtuſus*
Kąt wewnętrzny *Angulus internus*
Kąt zewnętrzny *Angulus externus*

Kąt

---

* *W niektórych mieyscach, w wykładzie Słów Łacińskich na swoyskie nie trzymaliśmy się słownego tłumaczenia, ale mieliśmy wzgląd na wyraz i bliższy do dokładnego rzeczy wystawienia, i stosownieyszy do mowy Oyczystey.*

Kąt wyskakujący *Angulus saliens*
Kątomierz *Graphometrum*
Kąty na przemian *Anguli alterni*
Kąty przyległe *Anguli adjacentes*
Kąty przeciwne w wierzchołku *Anguli ad verticem oppositi.*
Koło *Circulus*
Kołowy *Circularis*
Kwadrat *Quadratum*
Kwadrat ukośny *Rhombus*
Kwadrowanie *Quadratura*
Łuk *Arcus*
Następnik *Consequens*
Na odwrot, albo odwrotnie *Inversè albo - in ratione inversa*
Niespołmierny *Incommensurabilis*
Obwod *Perimeter*
Odcinek *Segmentum*
Odwrotny *Inversus.*
Okrąg *Circumferentia.*
Opisać *. Circumscribere*
Oś *Axis*
Ostrokątny *Acutangulum*
Pamiętnik *Memoriale*
Pierwiastek *Radix*
Piąciokąt *Pentagonum*
Plon *Perpendiculum*
Pionowy *Verticalis*
Podanie *Propositio*
Podstawa *Basis*
Podziałka *Scala*
Poprzednik *Antecedens*
Pośrednie *Mediatè*

Po-

Powierzchnia *Superficies*
Powietrznia *Atmosphera*
Poziemnie *Horizontaliter*
Poziomy *Horizontalis*
Prawidło *Alidada*, albo *Regula*
Promień *Radius*
Prostokąt *Rectangulum*
Prostokątny *Rectangulum* nap. Triangulum
Prostokreślny *Rectilineus*
Prostopadle *Perpendiculariter*
Prostopadły *Perpendicularis*
Przeciwprostkątna *Hypothenusa*
Przedmiot *Obiectum*
Przekątna *Diagonalis*
Przenośnik *Transportator*
Przypuszczenie *Suppositio*
Przystawanie *Convenientia*
Ramie kąta *Crus Anguli*
Rosprawa *Dissertatio*
Rostwartokątny *Obtusangulum*
Rownoboczny *Æquilaterum*
Rownoległobok *Parallelogrammum*
Równoodległa *Parallela*
Równoodległe *Parallele*
Równowaga *Libella*
Równoważenie *Libellatio*
Różnoboczny *Scalenum*
Rozwiązanie *Solutio*
Sieczna *Secans*
Skrayny *Extremus*
Spełnienie *Supplementum*
Spółmierny *Commensurabilis*
Spółśrodkowy *Concentricus*
Srednica *Diameter*

Srodek *Centrum*
Stanowisko *Statio*
Stolik Geometryczny *Tabula Prætoriana*
Stopień *Gradus*
Stosunek *Ratio*
Stosunek dwudzielny *Ratio subduplicata*
Stosunek dwumnożny *Ratio duplicata*
Stosunek składany *Ratio Composita*
Styczna *Tangens.*
Sześciokąt *Hexagonum*
Tosamość *Identitas*
Troykąt *Triangulum*
Twierdzenie *Theorema*
Twierdzenie przybrane *Lemma*
Ukośny *Obliquus*
Warunek *Conditio*
Wierzchołek *Vertex*
Wieszadło *Pendulum*
Wniosek *Corollarium*
Wpisać *Inscribere*
Wstawa *Sinus*
Wykładnik *Exponens*
Wyprostowanie *Rectificatio*
Zasada *Principium*
Zagadnienie *Problema.*

OMYŁ.

OMYŁKI DRUKU

Karta	*Wierz*	*ſtoi*	*Popraw*
33	1	*potwierdzenie*	twierdzenie
43	10	*przypiſać*	*na boku Fig.* 5.
43	27	CHE	CAE
44	4	CBH	GBH.
47	10		na boku *Figura* 2.
76	3	DEFC	BEFC.
83	19	39×81	39×81
86	5	*Fig.* 7 *Tab. VIII. Fig.* 1	
87	1	$26\frac{1}{2}$	$25\frac{1}{2}$
92	17	opuſzczaiąc	opuſzcza ſię
95	22	kończą	kończą ſię
100	25	*podzieloney*	podzielney
105	5	drugi	drugą ;
111	19	Lobo	Lubo
111	27	Kwadratow i kwadratowy	
136	12		*na boku Fig.* 4
138	23	FGHL	FGKL.
139	1	FGHL.	FGKL.
143	12	dziewiącią	dziewięciom
144	5	AB°	ABq
144	10	BC	2BC
144	11	2BC	2BC,
153	7	Cyrculi	Circuli ;
153	23	punktem	punkt ten
157	10	ACB.	ACE.
169	3	$\frac{3}{3}$	$\frac{5}{3}$
176	25	więſzym	więkſzym
180	12	ſię	ſą
183	9	podzielone	podziału
186	10	ad	ab

Karta	Wiersz	ſłoi	poprawa
190	10	y 5	zmazać
	13	*Fig.* 4.	*Fig.* 5.
	14	*Fig.* 5.	*Fig.* 6.
196	3	Eigur	*Figur.*
197	23	trzeck	trzech
200	26	podanie	podania
206	11	BC.	BG.
209	7	to	a to
213	8	czyli	zmazać
213	18	dotkinięcia	dotknięcia
213	19	*poporowadźmy*	poprowadźmy
213	23	ADE	ADC.
214	21	Kwdrat	kwadrat.
215	19	*Przyſtoſowane*	Przyſtoſowanie
219	1	Niechy	Niechby.
219	2	iako	iak
223	24	pierwſzy	pierwſzey
224	6	ciągłe	ciągło
224	7	;	:
249	24	także	takie
251	1	bylbył	był.
256	4	kontów	Kątów
257	27	dwóm mnożnym	dwumnożnym
259	1	twierdzić	ztwierdzić
267	23	Troykąty	kąty
268	1	części	części równych
268	15	średnie	średnice
268	20	podziały	poddziały
273	3	(267)	(266)

Karta	Wierz	ſtoi	poprawa
276	5	puktem	punktem
277	16	*miara*	kończą
280	1	wkreślić	wykreślić
281	15	cerklu	cerkla
284	12	Ųważ	Uwaga
286	5	równey odległey,	równoodległey.
286	8	wſztkie	wſzyſtkie
287	4	założywſzy	zacząwſzy
287	21	wielkości	tey wielkości
288	11	rachuią	rachuiąc
290	16	Pryyſtoſowanie	Przyſtoſowanie
291	1	mierze	mierzę
291	3	ſzukſm	ſzukam
292	17	w iakim	wjakiey
296	16	ſkoczyła	ſkończyła
298	22	podſtwa	Podſtawa
300	8	niedoſtępnege	niedoſtępnego
300	8	doyiść	doyść
304	8	na różnych	Kąty na rożnych
318	13	podzieloney	podzielney
320	14	Lo. 2,0301300	Lo. 2--03010 300
320	21	Dopetn	Dopełn.
323	20	liczba	liczby
325	11	róznożoney	rozmnożoney.
342	25	180 (A x B) — 180 — (A+B)	
347	12	Pr.	Pr:
347	21	2,28330,12	2, 2833012
348	2	ktorogo	którego
348	3	przeciwproſtokątna	przeciwproſtkątna
352	1	w Tróykęcie	w Troykącie

Poprawa Kart: 369. 370, *i* 371,

Wſtaw. AyB : Wſt. ABy = AB : Ay.

Log. AB = 3.0791812.

Log. Wſt. ABy = 9,9904044,

Summa = 13,0695856,

Log. Wſt: AyB = 9,7692187.

Reſzta = 3,3003669. = Log, Ay.

Więc Ay = 1996,95.

Znalażſzy bok Ax = 1286,35,

Ay = 1996,95.

Kąt między temi bokami zawarty xAy = 35°.

Będzie - - Ax + Ay = 3283,30

Ay — Ax = 710,60

Axy + Ayx = 145°.

$\frac{\text{Axy + Ayx}}{2.} = 72\frac{1}{2}°.$

Więc (podług Twiedz: 2. § 342)

3283,3: 710.6 = Stycz: $72\frac{1}{2}°$: Stycz: $\frac{Axy - Ayx}{2}$

Log. Stycz: $72\frac{1}{2}°$ = 10.5012777.

Log. 710,6 = 2,8516252.

Summa = 13.3529029.

Log. 3283,3 = 3,5163106.

Roznica = 9,8365923. = Log.Stycz: 34°28'

Więc $\frac{Axy - Ayx}{2}$ = 34 28'.

Aże iest $\frac{Axy + Ayx}{2}$ = 72 30.

Więc Axy = 106 58.

Ayx = 38 2.

Maiąc wiadome wszystkie Kąty w Troykącie xAy, i procz tego, dwa boki: Ax, Ay; znaydziemy bok trzeci xy, to iest odległość, ktorey szukamy; a to przez iednę z tych dwoch proporcyy:

Wst. Ayx; Wst. xAy = Ax : xy

Albo, Wst. Axy : Wst. xAy = Ay : xy.

Szuka-

Szukaymy boku xy. przez pierwszą nap. proporcyą:
Będzie Log. Ax = 3,1093589.

Log. Wſt. xAy = 9.7585913.

Summa = 12,8679502.

Log. Wſt. Ayx = 9.7896652.

Rożnica = 3,0782850 = Log. xy.

Więc xy = 1197,525.

Poprawa Karty 374.

Reſzta = 9 9367072 = Log. Doſt. B.
Więc Kąt B. = 30° 11' 15".
AC : AD = Pr. : Doſt. A.

Log. AD = 2.5930644.

Log. Pr. = 10,000000.

Summa = 12,5930644.

Log. AC = 2,7867514.

Reſzta = 9,8063130. = Log. Doſt. A.

więc Kąt A = 50° 11' 37".

C = 99 37 8.

Dla zapewnienia ſię o tym, można ſzukać. ieżeli ſtoſunek Wſtaw Kątow : A, i B. równa ſię, iak powinien

winien, ſtoſunkowi boków im przeciwnych; będzie zaś w ſamey rzeczy równał ſię, gdy w proporcyi, kórey trzema pierwſzemi wyrazami będą: BC. AC, Wſt. A, za czwarty wyraz wypadnie Wſtawa Kąta B, teyże ſamey co wyżey ważności.

Log. Wſt. A, = 9,8854811.

Log. AC = 2.7867514.

Summa = 12,6722325.

Log. BC = 2.9708116.

Reſzta = 9,7014209. = Log. Wſt: B.

Kąt B, odpowiadaiący temu Logarytmowi różni ſię mniey niż $\frac{1}{2}°$ od wyżey znalezionego.

CZĘSC PIERWSZA

O Liniach i powierzchowniach.

ROZDZIAŁ I.

Wiadomości początkowe o Liniach prostych, o Obwodzie Koła, i o Kątach.

1. Podróżny umieiący rachować kroki swoie, potrafi dochodzić iak długa była droga ta, którą odprawił. Strzelec doświadczeniem i wprawą częstą nauczony, osądzi łatwo, ieżeli strzelba iego do zamierzonego doniesie celu. Obadwa tak sposobią się do pewnieyszego wyobrażenia sobie długości i odległości, to iest: do porównania ich z temi, które już dobrze poznali i wyznaczyli. Krok iest taką dla po-

drożnego długością, a średnia strzelby donośność, służy myśliwemu do wymiaru inney odległości.

Te proste, i inne, im podobne sposoby wyobrażenia sobie długości niewiadomych, użyteczne są w wielu bardzo okolicznościach życia; gdzie potrzeba osądzenia prędkiego, innych dokładnieyszych użyć nie pozwala. A ponieważ przez częste sposobow takich używanie, uczemy się chronić tych omyłek, w któreśmy w szczególnych razach wpadać zwykli byli, nie od rzeczy więc będzie wprawiać i tak oko uczących się, tyle iednak, ile to zgodzić się może z publiczną edukacyą.

Ale iakieyżekolwiek w tey mierze łatwości nabiorą uczniowie przez częste wprawiania się; chybiać wszelako będą w porownywaniu długości bardzo wielkich, lub bardzo małych. Oprocz tego, każdy w szczególności człowiek, używaiąc sposobu wyżey wspomnionego, rożneby ieden od drugiego czynił wyznaczenia iedneyże nawet długości; a zatym trudnoby ludzie iedni z drugiemi zrozumieć się w tey mierze mogli, gdyby pierwszego tego w wyznaczaniu długości sposobu trzymali się.

2. Z tey pobudki udano się do ustanowienia umówioney pewney długości, którą na samo weyrzenie, dokładnie sobie wyobrazić można było. Do tey stosowano wszystkie inne długości niewiadome, które poznać chciano, i dochodzono ich, przykładaiąc wiadomą długość do niewiadomych; długość takowa nazwana iest *Miarą*.

3. W iednymże kraiu, nie iedna Miara zwykła być używana, według różnych okoliczności, które do iey użycia zdarzaią się. W Polszcze na przykład kupieckie niektóre towary, i pomnieysze na ziemi długości, łokciem, podzielonym na cale i liniie mierzyć się zwykły. Gdy zaś znacznieyszą iaką długość wymierzać na ziemi trzeba, używamy do tego sążnia z trzech łokci złożonego, albo prętu zawieraiącego 7.½ łokci, a ieszcze lepiey sznura, który 10. prętow zamyka.

Ponieważ te ostatnie miary nic nie są innego, tylko łokieć kilka razy przydany, dosyć więc będzie wielkości łokcia dokładne sobie wyobrażenie uczynić, aby dokładnie poznać i wielkość miar większych od łokcia. Wszystkie te słowa: *Sznur*, *Pręt*, *Sążeń*, *Łokieć* i t. d. byłyby tylko słowami próżnemi y bez zrozumienia, gdy-

byśmy dokładnego nie mieli wyobrażenia, iedney z tych miary, na przykład łokcia; bo wszystkie nasze wyobrażenia, które o wielkościach mamy, są tylko *względnemi* (relativæ) iedne do drugich.

4. Kraie różne odmiennych też miar zażywaią; a co ieszcze w opaczne rozumienie wprowadzić może, miary te, lubo odmienne, iednymże słowem często się wyrażaią. (a) I tak łokieć Litewski iest $\frac{1}{10}$ większy od łokcia Koronnego; a zatym i inne Litewskie miary, w które łokieć wchodzi, większe będą od miar Koronnych. Łokieć Francuzki, dwa razy prawie iest od Polskiego większy. Mila Niemiecka, zawiera prawie $1.\frac{2}{3}$ mili Francuzkiey; a mila Angielska trzecią tylko iest Francuzkiey mili częścią. (Obacz w 3. Części Arytmetyki, na karcie. 276.

5.

(a) *Matematycy z wielką usilnością szukali miary iednostayney, do którey możnaby było stosować wszystkie inne. Rozumieli oni, iż ią znaleźli w długości* Wieszadła prostego (*Pendulum simplex*) *ustawionego w mieyscu wolnym od zawad, i na powietrzu pomiarkowanym; ale ta materya należy do Fizyki.*

5. W przypadkach, o których mówiliśmy, na samę tylko wzgląd miało się *długość*, wielkości tych, któreśmy uważali. W takowym razie mówić się zwykło, że się samemi Liniiami zaprzątamy, a w szczególności Liniiami *prostemi*; gdy te wyznaczaią odległość, albo naykrótszą drogę od iednego ich końca do drugiego. Gdyby zaś w tychże samych Liniiach baczył kto szczególniey to mieysce, gdzie się liniia zaczyna, albo gdzie się kończy; lub gdzie iedna drugą przecina, wtedy mówiłoby się, że się zaprząta około *Punktu*.(b)

6. Przez ieden punkt można tyle Linii rzeczą samą, albo przynaymniey myślą poprowadzić, ile kto zechce. Ale gdy i drugi Punkt ieszcze, w iakieykolwiek od pierwszego odległości, będzie wyznaczony, przez który Linia prosta ma przechodzić, w tym razie położenie teyże Linii

(b) *Nie trzeba tych wyrazów mieć za Definicye, ale tylko za szczere obiaśnienia i wyłuszczenia wyobrażeń, które do tych słów zwykliśmy przywięzywać. Im więcey kto zastanawia się nad początkami, na których zasadzaią się nasze wiadomości, tym większą postrzega trudność w ich wyłożeniu.*

nii, iuż się wyznacza; albo co na iedno wychodzi; wszystkie Liniie proste, któreby kto przez dwa Punkta dane poprowadził, nie będą tylko iedną i tą samą Liniią. A zatym, gdy dwie Liniie proste schodzą się, lub przecinaią, nie mogą tylko Punkt ieden mieć spolny. Gdy się mówić będzie w szczegulności o wymierzaniu na ziemi, powiemy tam, iaką ostrożność mieć potrzeba, gdy wyznaczyć i wymierzyć przychodzi Liniią łączącą dwa Punkta, których odległość iest wielka.

7. Na papierze, aby złączyć dwa Punkta przez Liniią prostą, używamy narzędzia, które się nazywa *Liniałem* (Regula) niespuszczaiąc się na samą rękę y oko; i przystawiwszy ten Liniał do dwoch wyznaczonych Punktow, kreślemy piorem, lub ołowkiem Liniią podaną.

Oprocz wymiaru Linii prostych, przypada często zatrudniać się położeniem ich, iednych względem drugich.

8. Gdy dwie Liniie, maią Punkt spolny, mogą być do siebie nachylone rozmaitemi sposobami. Abyśmy tę wielość położeń ich, iednych względem drugich dobrze poieli; wystawmy sobie Linią iednę prostą na stole na przykład wyrytą, i drugą

gą na niey nayprzod położoną, i zupełnie do niey przystaiącą, a potym obracaiącą się około Punktu wyznaczonego, któryby tym obydwom Liniiom był spolny. W takowym obracaniu się, druga Liniia odmienne coraz położenia i nachylenia mieć będzie względem pierwszey. Te rozmaite nachylenia nazywaią się *Kątami* (Anguli) Punkt, około którego ta druga Liniia obracała się, nazywa się *Wierzchołkiem kąta.* (Vertex Anguli) Liniie, które nachyleniem swoim ten kąt czynią, nazwać można *Ramionami* (po łacinie zowią takowe Liniie *Crura.*) Pod czas obracania się tey Linii, Punkt którykolwiek w niey naznaczony, w iednakiey zawsze odległości będzie od tego Punktu, około którego statecznie się Linia obraca; a zatym i wszystkie Punkta śladu od niey zostawionego, iednakowo będą odległe od tego Punktu nie wzruszonego. Jeżeli obracaiąca się Linia zupełny obrot uczyni, że znowu do pierwszego położenia, zkąd się obracać zaczęła, powróci; ślad taki od tegoż samego Punktu zostawiony, nazywa się *Okręgiem koła*, (Circumferentia Circuli) Własność Okręgu ztąd wypływaiąca, iest ta: że każdy w nim znayduiący się Punkt, w równey od iednego Punktu zostaie odległości; a ten Punkt nazywa się *Srodkiem.* (Centrum) Odległość

środka od któregokolwiek Punktu Okręgu, nazywa się *Promieniem.* (Radius) Część Okręgu, nazywa się *Łukiem.* (Arcus) á Linia prosta łącząca końce dwa Łuku, nazwać się może *Cięciwą.* (Chorda) Gdy Cięciwa ta przechodzi przez środek Okręgu, a zatym dwa razy większa iest od promienia, zwać ią będziemy *Srednicą;* (Diameter) Dzieli ona okrąg koła, na dwie równe części, które tym tylko różnią się; że iedna z iedney, a druga z drugiey strony Srednicy iest położona. (c)

9. Po tych Definicyach, (które obiaśnić należy ręcznym działaniem tego, co wyrażaią) poydźmy do wyłożenia początku kątow, z którego pochodzą.

Jeżeliby Linia ruchoma, odprawiła obrotem swoim, połowę, trzecią część, czwartą, piątą i t. d. tey całey drogi, którą iey obeyść trzeba było, aby do pierwszego swego położenia powróciła; Punkt też którykolwiek tey Linii, odprawił tym samym połowę, trzecią część, czwartą, piątą okręgu zupełnego, któryby

(c) *Chcąc na papierze nakreślić Okrąg koła, którego środek y promień mamy wyznaczony; używamy do tego narzędzia nazwanego pospolicie* Cerklem (*Circinus*)

by ta linia zrobiła wkoło się obrociwszy. Zkąd wynika, że wierzchołek kąta obrawszy za środek, i od niego iakimkolwiek promieniem łuk nakreśliwszy, któryby między ramionami kąta zamykał się, wielkość tego łuku koła względem całego okręgu, do którego należy, da nam poznać wielkość kąta, względem całego tego mieysca kątowego (Angularis) któreby iedna z tych dwoch linii przeszła, zaczynaiąc się obracać wtedy, gdy na drugiey leżała, a nie kończąc się obracać, aż znowu do niey przystanie. I przeto łuk ten nazwany iest Miarą (d) kąta między dwoma ramionami zamkniętego, a zatym tak łuk ten, iako i kąt, iednakowo się powiększaią, albo zmnieyszaią, to iest: staią się razem podwoynemi, potroynemi i t. d.

10.

(d) *Ten wyraz* Miara *nie kładzie się tu w ściśłym rozumieniu; miara albowiem iakiey ilości właściwie wzięta, powinna być tego gatunku, którego iest ta ilość, która się mierzy; na przykład długość iedna, mierzy się przez długość inną. Łuk zaś koła i kąt, są gatunku różnego, a zatym łuk koła miarą kąta właściwie wziętą być nie może.*

10. Ztąd się okazuie: że wielkość kąta od długości ramion iego nie zawisła. (uwaga to iest, nad którą dobrze zastanowić się potrzeba.)

11. Aby sposobem wygodnym wielkość każdego kąta wyznaczyć przez wielkość łuku między iego ramionami zamkniętego; którego promień iest dany; zgodzono się na podzielenie okręgu iakiegożkolwiek na 360. części równych, z których każda nazywa się *Stopniem* (Gradus.) Przeto ieżeli łuk zamknięty między ramionami kąta, ma w sobie 20, 30, 40, i t. d. części takich, iakich okrąg cały ma 360; o tym także kącie mówią, że ma 20, 30, 40. i t. d. stopniow. (e) Na tym gruncie zasadza się cała robota i używanie narzędziow zdatnych do mierzenia kątow na ziemi,

(e) *W działaniach większey dokładności wyciągaiących, dzielą ieszcze każdy stopień na* 60. *części nazwanych* Minutami, *a każdą minutę na* 60. minut drugich (*Minuta secunda* albo iednym słowem: *secunda.*)

Znak stopniow, iest: o *nad liczbą stopniow napisane.* o o o o

Tak nap: 20, 21, 30, 31, *i t. d. wymawia się: dwadzieścia, dwadzieścia ieden i t. d. stopniow.*

mi, i sposob robienia tychże kątow na papierze, któreby iakążkolwiek stopniow podaną liczbę zawierały. *O narzędziach tych mówić potym będziemy.*

Dla uniknienia długości, którąby obszerne każdego działania wykładanie za sobą pociągało, i aby natężeniu myśli pofolgować, zgodzili się Matematycy na pewne nazwiska Punktow, Liniow, Kątow i t. d. około których maią doczynienia.

12. Punkt oznaczaią przez iednę tylko literę, np: A.B.C.D. i t. d. gdy położenie tego punktu iest wiadome; a np: przez x, y, z, gdy nie wiedzą ale dopiero szukaią iego położenia.

Do oznaczenia Linii używaią liter, które na dwoch iey końcach kładą, ieżeli iest wielkości ograniczoney; ieżeli zaś w wielkości swoiey nie iest ograniczona, tedy na niey dwa punkta stanowią, i przy nich piszą dwie litery, któremi ią mianuią. Tak nap: Linia łącząca dwa punkta A i B oznaczona byłaby temi dwiema złączonemi literami AB. *Tab. I. Fig. 1*

Do oznaczenia kąta (ponieważ ten czynią dwie linie do siebie się nachylaiące) kładą

kładą trzy litery iednę przy wierzchołku kąta, drugą i trzecią przy końcu ramion tego kąta; a złączywszy ie razem, i w środku ich położywszy literę nad wierzchołkiem kąta napisaną, trzema temi literami kąt wyrażaią. Tak nap: kąt zrobiony przez dwie linie CA, CB. oznaczyliby iednym z tych dwóch wyrazem: ACB. albo BCA. Gdy wierzchołek nie należy do więcey iak do iednego kąta, dosyć będzie oznaczyć kąt tą iedną literą, która iest nad wierzchołkiem iego.

Fig. 2.

13. Kiedy ramie ruchome przez obrot swoy, którym początek kątow obiaśniliśmy, uchodzi tylko czwartą część całego okręgu; zrobi takim obrotem swoim dwa kąty rowne z tą Linią, około ktorey się obraca, gdy tę drugą daley pociągniemy. Te kąty nazywaią się *Proste* (Anguli recti) łuk koła, który im za miarę służy, będzie miał w sobie 90. stopni, sama zaś linia ruchoma, będzie w ten czas *Prostopadłą* (Perpendicularis) względem drugiey. (Obacz w pierwszey części Arytmetyki na karcie 87.)

Fig. 3.

Gdy to samo ramie ruchome obrotem swoim nie dochodzi czwartey części okręgu, wtedy kąty między nim i drugim ramieniem przedłużonym uczynione, będą

dą nie rowne. Jeden mnieyszy będzie od proſtego, a drugi większy. Te dwa kąty nazwane ſą *Przyległemi* (Adjacentes) albo (deinceps poſiti.) Mnieyszy od proſtego zowie ſię *Oſtrym acutus*) większy zaś od proſtego, *Roztwartym* (obtuſus) a iedna z tych linia nazywa ſię *Pochyłą* (obliqua) do drugiey. Kąty DCA. DCB. ſą nierówne; kąt DCB. ieſt oſtry, a kąt DCA. Roztwarty, Linia DC. pochyła do Linii AB. *Fig. 4.*

14. *Summa dwoch kątow przyległych, równa ſię dwom kątom proſtym.*

Niech będzie DC. pochyła do AB. ſumma kątow: DCB. DCA. równa ieſt dwom kątom proſtym.

Jakoż, gdyby Linia DC, zrobiwszy obrotem ſwoim około Punktu C, kąt BCD, daley ſię ieſzcze obracała, ażby naoſtatek przyſtała do linii CA, byłaby obrotem takim przeſzła dwa kąty proſte; ale też razem byłaby przeszła i kąty BCD, i DCA; więc te dwa kąty ſą dwiema częściami ſummy z dwoch kątow proſtych złożoney, a zatym rownaią ſię dwom kątom proſtym.

15. Gdyby Linia CD. była pociągniona na drugą ſtronę linii AB, naprzykład aż do

do E; kąty BCD, ACE, nazywałyby się, jeden względem drugiego *Przeciwległemi w wierzchołku* (ad Verticem oppositi) mają one wierzchołek C, spolny; a ramiona CA, CE, iednego z tych kątow, są przedłużeniem ramion CB, DC, drugiego.

16. *Kąty w wierzchołku przeciwległe są równe.*

Jakoż w samey rzeczy kąty: BCD, ACE, mogą być uważane, iak gdyby się zrobiły z obracania się linii ED, około Punktu niewzruszonego C, zaczynaiąc ten obrot, gdy Linia ED. na linii AB. leżała, aż do położenia iey na CE. Tym sposobem linia ED. przez taki swoy obrot nachyli się do linii AB, równie z iedney iak i z drugiey strony, a zatym czyni rowne kąty DCB, ECA.

Wszystkie te *Podania* (Propositiones) któreśmy dotąd przytoczyli, powinny być obiaśnione, wykonywaiąc ie, przez działania ręczne, na których się zasadzaią. (f)

ROZ-

(f) *Niech się nieobawiaią Nauczyciele żadnych zarzutow, gdy przez ruch linii tłomaczyć i obiaśniać będą wiele prawd Geometrycznych Uczniom swoim dopie-*

ROZDZIAŁ II.

O przystawaniu Troykątow, z przystosowaniem do rozwiązania wielu Zagadnień.

17. *Definicye*: Mieysce zakończone trzema liniami prostemi, zowie się *Troykątem prostokreślnym* (Triangulum rectilineum.) My samego przez się słowa *Troykąt* używać będziemy. Linie trzy, w których się *Troykąt* zamyka, zowiemy *Bokami* Troykąta (Latera Trianguli.) Takie linie zowią także *ścianami*. Tego nazwiska do innego potym znaczenia użyiemy. *Przystawanie*, Convenientia) i przypadanie Figur iednych do drugich, na którym równość dwóch iakich Powierzchni zakła-

---

ro poczynaiącym. Dalecy oni są ieszcze, aby w tey materyi domyślać się mieli subtelności Metafizycznych. Czynić pod ich oczami działania około tych rzeczy, któremi się zatrudniać mają, i zmysły ich na nie obracać, iest to ieden z nayskuteczniejszych sposobow, baczność w nich i uwagę do rzeczy przywiązać, a razem i natężeniu myśli pofolgować.

zakładamy, używane iest często w pospolitych życia ludzkiego potrzebach i wygodach. Na obicie naprzykład pokoiow, bierzemy tyle płotna, lub inney iakiey materyi, ile wystarcza na przykrykrycie ścian iego; i wielkość powierzchni tego obicia, nie rożni się od ścian powierzchni, które pokrywa tylko tym, że ściany są pod obiciem, a obicie na ścianach. Toż mówić o deskach wystarczaiących na podloge, albo o szybach do okien i t. d. Krawcy o to się staraią, aby tak suknie lub inne odzienia wymierzali, żeby te przystawały iak naylepiey do tych ciała części, które pokrywać maią. Dwie księgi iednakowego dzieła, dwa obrazy pod iednakowemi wymiarami odmalowane, nie różnią się co do powierzchni, tylko tym, że nie są iedną rzeczą, ale dwiema. Miary na zboże, napoie, i t. d. tak się zgadzaią z sobą, że iedna prawie wielość ziarna pewnego, napełnia korzec ieden, iako i drugi; tyle w ieden garniec, co i w drugi mieści się napoiu i t. d. gdy te miary stosuią się do iedney u stanowioney od Zwierzchności.

18. *Twierdzenie* (Theorema). Jeżeli w dwoch Troykątach, dwa boki w iednym, równe są dwom bokom w drugim, i kąty między temi bokami zawarte równe, trzeci

ci też bok iednego, równy będzie trzeciemu bokowi drugiego, i kąty przy tych bokach równych będące, w iednym i w drugim Troykącie będą równe.

Niech będą dwa Troykąty: ABC, abc, których boki: AC, ac, ſą równe, boki też BC, bc, równe i kąty: C, i c. równe. Dowieść trzeba, że i boki: AB, ab, i kąty A, i a, iako też B, i b, będą równe. *Fig.* 5.

Dowodzenie (Demonſtratio.) Wyſtawmy ſobie Troykąt: abc, iakoby oderwany (co też odſtrzygszy go, i w rzeczy ſamey wykonać można) i przenieſiony na Troykąt: ABC. w ten ſpoſob; aby położywszy linią ca, na linii CA; linia też cb, przyſtała do linii CB, (co dla równości kątow C, i c, naſtąpić powinno) Ponieważ linia ca, rowna ieſt linii CA; a linia cb, linii CB, Punkta a, i b, przypadną na punkta A, i B; a zatym i linie ab, i AB, będą przez te ſame punkta zakończone. Więc te dwie oſtatnie liniie przykryią ſię zupełnie iedna drugą; a zatym będą równe; i zrobią z liniami ca, CA, cb, CB, kąty równe a, i A, iako też b, i B.

19. *Uwaga.* Dwa Troykąty cab, CAB, nie różnią ſię od ſiebie, tylko przez to,

że odmienne mieyſce zaſtępuią. O takich więc dwóch Troykątach, a w powſzechności i o każdych dwoch Figurach, ſamym tylko położeniem mieyſca różniących ſię mówiemy, że do ſiebie *przyſtawać mogą.*

20. *Przyſtosowanie: Jeżeli w iednym Troykącie, dwa boki ſą równe, będą też równe i dwa kąty przy nich leżące.*

Fig. 6. Niech będzie Troykąt ABC, którego boki AC, BC, ſą równe; kąty też A i B, będą równe.

Wyſtawmy ſobie, że ten Troykąt ABC, wybity ieſt na drugim mieyſcu tak, żeby bok CA, w wybitym Troykącie, to miał położenie, co bok CB, w Troykącie pierwſzym, a znowu bok CB, aby w drugim, na tey ſtronie leżał, na którey bok CA, w pierwszym; ponieważ kąt C. ieſt iednakowy w obydwóch tych Troykątach, położywszy tedy drugi Troykąt na pierwszym; bok CB, i CA, Troykąta wybitego przyſtanie zupełnie pierwszy CB, do boku CA, drugi CA, do boku CB, Troykąta pierwszego, a zatym i Punkta B, i A, należące do Troykąta wybitego, leżeć będą na punktach A, i B, należących do pierwszego Troykąta. Więc drugi Troy-

kąt

kąt przeniesiony na pierwszy będzie mógł przystać do niego; a przeto kąty B i A, tego Troykąta równe będą, pierwszy kątowi A, drugi kątowi B, Troykąta podłożonego. Aże kąt A, w tym podłożonym Troykącie, iest równy także kątowi A drugiego Troykąta, więc kąty A i B, Troykąta podłożonego są równe kątowi A. w Troykącie na nim położonym, a zatym kąty A i B, są sobie równe.

Następuiące tegoż twierdzenia dowodzenie, zastanawia prawie wszystkich poczynaiących; i wielu iest zdania, lubo często zawodnego, że w zrozumieniu tego dowodzenia, daie się poznawać poiętność Ucznia i sposobność do Geometryi.

Niech będzie Troykąt CAB, którego boki CB, są równe; kąty CAB, CBA, będą też równe. *Fig. 7.*

Przygotowanie. Na liniiach CA, CB, przedłużonych, weźmy iakiekolwiek liniie równe, naprzykład: AD, BE, i poprowadźmy BD, AE.

Dowodzenie. Ponieważ liniie CA, CB, są równe; a liniie też AD, BE, wzięte są równe; więc w Troykątach: DCB, ECA, gdzie kąt C iest spólny; ramiona

CB, i CA, CD, i CE, tego kąta równe będą; a zatym te dwa Troykąty przyſtać do ſiebie mogą; (18) a w ſzczegulności liniie AE, BD, i kąty przy D i E, równe będą.

W Troykątach: ADB, BEA, boki AD, BE, ſą równe, dowiodło ſie też, że liniie BD, AE, ſą także równe, i że równe ſą kąty w tych ramionach zawarte przy D, i E; więc te Troykąty mogą do ſiebie przyſtać; a w ſzczegulności kąty: DAB, EBA, ſą równe, a zatym i im przyległe: CAB, CBA. będą równe.

21. Gdyby wſzyſtkie trzy boki w Troykącie były równe, trzy także kąty w nim równe byłyby.

22. *Definicye.* Gdy w Troykącie dwa boki ſą równe, taki Troykąt zowiemy *Równoramiennym* (Jsosceles albo Æquicrurum.) Gdy w Troykącie boki trzy będą równe, nazwiemy go *Równobocznym* (æquilaterum,)

Gdy w Troykącie wſzyſtkie trzy boki nierówne będą, zwać go będziemy: *Rożnobocznym* (Scalenum.)

23. *Twierdzenie* 2. Gdy dwa Troykąty, maią bok ieden równy, i gdy dwa kąty

kąty przy tym boku iednego troykąta. równe są względem dwóch kątów przy boku równym drugiego Troykąta; trzeci też kąt w iednym Troykącie, równy będzie trzeciemu kątowi w drugim; i dwa inne boki, równe względem siebie będą w obydwóch tych Troykątach.

Niechay naprzykład w dwóch Troykątach: ABC, abc, boki AB, ab, i kąty A i a, B i b, będą równe; będzie i kąt C, równy kątowi c; boki: AC, ac, i boki także BC, bc, będą równe. *Fig.* 5.

Dowodzenie. Wystawmy sobie Troykąt abc, przeniesiony na Troykąt ABC; i na nim położony, tak, aby Punkt *a.* postawiwszy na Punkcie A, liniia ab, równa linii AB, na niey leżała. Ponieważ kąt *a.* równa się kątowi A, i kąt *b.* kątowi B; linia też *ac*, przystanie do linii AC; a liniia bc, do BC; Punkt tedy *c*, musi się znaydować razem i na linii AC. i na linii BC, a zatym znaydować się będzie na ich spólnym przecięciu C. Więc Troykąt abc, zupełnie przystanie do Troykąta ABC, a przeto liniie ac i bc, równe będą liniiom AC, BC, tak, iako i kąt c, równy kątowi C.

24. *Przystosowanie.* Jeżeli w Troykącie, kąty przy *Podstawie* (ad basim) są równe, taki Troykąt będzie *Równoramien-*

ramiennym. Dowodzenie tego podobne iest wcale dowodzeniu położonemu w przyſtosowaniu pierwszego Twierdzenia (20.) Jeżeli Troykąt ma wszyſtkie trzy kąty równe, będzie Równobocznym.

25. *Twierdzenie* 3. Gdy w dwóch Troykątach, boki trzy iednego, równe ſą trzem bokom drugiego; i kąty też trzy w iednym, będą równe trzem kątom w drugim, a te dwa Troykąty mogą przyſtać do ſiebie.

Tab. II. Fig. 1. i 2. Niech będą dwa Troykąty ABC, abc, takie, aby bok AB, w pierwszym, równy był bokowi ab, w drugim, podobnie iak i boki AC, BC, równe bokom ac, bc, te dwa Troykąty mogą przyſtać do ſiebie.

Dowodzenie. Wyſtawmy ſobie Troykąt abc, przenieſiony i położony pod Troykątem ABC, tak, iak go wyraża na figurze Troykąt ABD. Poprowadźmy linią CD. Ponieważ liniie CB, BD, ſą obiedwie równe linii cb, ſą też iſobie równe; więc i kąty: BCD, BDC, ſą równe (23.) Podobnie kąty ACD, ADC, ſą także równe; a zatym i kąty: ACB, ADB, równe będą.

Więc dwa Troykąty: ACB, ADB, mogą przyſtać do ſiebie. Ale że też Troyką-

kąty: ABD, i abc przyſtać do ſiebie mogą; więc przyſtaną także i Troykąty: ABC, abc.

26. *Uwaga.* Położenie linii CD, może być troiakie, bo może albo przecinać linią AB, między punktami A i B, albo może przez który z tych dwóch punktów przechodzić, albo nawet i przez przedłużenie teyże linii AB. Dowodzenie toż ſamo ieſt we wſzyſtkich trzech razach.

27. *Zagadnienie.* (Problema.) Maiąc dane dwa Punkta, znaleść trzeci, któryby od każdego z tamtych, w iednakowey był odległości.

Rozwiązanie (Solutio.) Od iednego i od drugiego z punktow danych, poprowadziwszy łuk koła promieniem większym od odległości tych dwóch Punktow; tam gdzie ſię te dwa łuki przecinać będą, będzie punkt, którego ſzukamy.

28. *Uwaga.* Na rozwiązaniu tego, lubo tak łatwego zagadnienia, zaſadza ſię *Wykreślenie* Geometryczne wielu innych Zagadnień, Wykreślenie to zowią po łacinie: *Conſtructio*, lubo tego ſamego ſłowa zażywaią także Matematycy na oznaczenie przygotowania poprzedzaiącego dowodzenie

dzenie, przez kreślenie pewnych linii potrzebnych do tegoż dowodzenia. My przykładem ich, w obydwóch także razach, używać będziemy tego słow: *Wykreślenie.*

29. *Zagadnienie* 2. Daną linią prostą, podzielić na dwie części równe.

Rozwiązanie. Sposobem w poprzedzaiącym Zagadnieniu wyrażonym, znaydźmy po obydwóch linii tey stronach dwa punkta, któreby od końców iey iednakowo były odległe; złączmy te dwa punkta linią prostą, ta przetnie w iednym punkcie linią daną, i w tym przecięciu będzie punkt podziału żądanego.

Fig. 3. Niech będzie linia dana AB, C Punkt równo odległy od A i B, końców linii daney; D. drugi punkt, podobnie także odległy. Punkt X, gdzie linia CD, przecina linią AB, dzielić będzie na dwie równe części linią daną.

Wykreślenie, (Constructio.) Pociągniymy liniie AC, BC, AD, BD.

Dowodzenie. Troykąty: CDA, CDB, maią trzy boki równe iedne drugim; a zatym (25.) mogą przystać do siebie; a w szcze-

w szczególności, kąt ACD, równy iest kątowi BCD. Więc Troykąty ACX, BCX, mieć będą boki AC, i BC, równe, bok CX, spólny; i kąt także w tych ramionach zamknięty równy; więc (24.) te dwa Troykąty mogą do siebie przystać, i linie AX. i BX. są równe.

30. *Defin:* Gdy w Troykącie, albo w iakieykolwiek inney figurze, bok ieden będzie przedłużony; kąt, który się między tym przedłużeniem i bokiem przyległym zrobi; nazywa się *Zewnętrznym* (externus) tego Troykąta, lub inney figury.

31. *Twierdzenie* 4. W Troykącie, zewnętrzny kąt większy iest od iednego z wewnętrznych na przeciwko niego położonych.

Niech będzie Troykąt ABC, którego bok AB. przedłużony iest według upodobania ku D; kąt zewnętrzny CBD, większy iest niżeli ieden ze dwóch wewnętrznych, naprzykład C. *Fig.* 4.

Przygotowanie. Przetniymy na połowę w punkcie E, bok BC, i poprowadźmy linią AE, aż do F, aby FE, równała się AE; pociągniymy ieszcze i linią BF.

Dowo-

Dowodzenie. Troykątow: AEC, FEB, kąty przeciwne w wierzchołku E, ſą równe, i ramiona tychże kątow równe, z wykreślenia. Więc dwa te Troykąty, mogą do ſiebie przyſtać (18.) a w ſzczególności kąt C. równy ieſt kątowi EBF; który kąt EBF, ieſt tylko częścią kąta CBD. Przeto kąt cały CBD, większy ieſt od kąta C, równego kątowi EBF.

32. *Wniosek.* (Corollarium.) Summa dwóch iakichkolwiek kątow w Troykącie, mnieysza ieſt od dwóch kątow proſtych. Ponieważ albowiem kąt CBD, większy ieſt od kąta C, Summa kątow CBD, ABC, większa będzie od Summy kątow C. i ABC; a że ſumma dwóch kątow pierwszych, waży tyle, co dwa kąty proſte, bo ieſt ſummą dwóch kątow przyległych (14.) więc ta druga ſumma mnieysza ieſt od pierwszey.

Idzie zatym, że ieżeli w Troykącie, będzie kąt ieden proſty, albo też roztwarty, dwa inne, nie mogą być, tylko każdy z nich oſtry.

33. *Definicye.* Jeżeli Troykąt zawiera w ſobie kąt proſty, zowie ſię *Proſtokątnym* (Triangulum Rectangulum.) Jeżeli ma kąt roztwarty, nazwać go można *Roztwartokątnym*

kątnym (Obtuſangulum.) Jeżeli wszyſtkie trzy kąty ma oſtre, zwać ſię będzie *Oſtrokątnym* (Acutangulum.)

34. *Twierdzenie* 5. Gdy w dwóch Troykątach, bok iednego będzie równy bokowi drugiego, i kąt tym bokom przyległy równy ieden drugiemu, a kąt nie przyległy tym bokom, także równy w obydwóch Troykątach: dwa te Troykąty mogą przyſtać do ſiebie.

Niech będą dwa Troykąty ABC, abc, maiące dwa boki AB, ab, równe, kąty A i a, przy tych bokach równe, i kąty C, i c, równe. Te dwa Troykąty mogą do ſiebie przyſtać. *Fig.* 5.

Dowodzenie. Przenieśmy Troykąt abc, na Troykąt ABC, tak, aby bok ab, przyſtawszy do boku AB, bok też ac, przyſtawał do boku AC; (co dla równości kątow a, i A, naſtąpić powinno.) Gdyby Punkt c, nie przypadł na punkt C, toby przypadł albo między punktami A i C, naprzykład na d, albo daley za punktem C, na linii AC, przedłużoney, naprzykład na D; w pierwszym razie, kąt AdB, albo C, byłby zewnętrzny Troykąta CBd, a zatym większy od kąta C. W drugim razie kąt C, byłby zewnętrzny Troykąta CBD,

CBD, a zatym większy od kąta D. albo c; co w obydwóch razach, iest przeciwko podaniu, bo kąty C, i c, dane, są równe. Więc linia ac, przeniesiona na AC, nie gdzie indziey kończyć się będzie, iak na punkcie C, a za ym Troykąty BAC, bac, mogą przystać do siebie. (18.)

35. *Twierdzenie 6.* W każdym Troykącie, ieżeli bok ieden większy iest od drugiego; i kąt też na przeciwko boku pierwszego, większy będzie od kąta drugiemu bokowi przeciwnego.

Fig. 5. Niech będzie Troykąt ABC, którego bok AC, większy od boku BC; będzie też i kąt ABC, większy od kąta A.

Przygotowanie. Na boku AC, większym, weźmy CD równą CB, i od D poprowadźmy DB.

Dowodzenie. Troykąt równoramienny BCD, ma kąty CBD, CDB, równe; kąt CDB iest zewnętrzny Troykąta BAD; więc iest większy niżeli kąt A; a zatym i kąt CBD większy będzie od kąta A; dopieroż kąt CBA większy iest od tegoż kąta A.

36. *Twierdzenie 7.* Gdy w Troykącie, większy iest kąt ieden od drugiego; bok

bok naprzeciwko pierwszego kąta, większy też będzie od boku przeciwnego drugiemu kątowi.

Dowodzenie. Gdyby bok przeciwny pierwszemu kątowi, był równy albo mnieyszy od boku drugiemu kątowi przeciwnego, pierwszy też kąt byłby równy drugiemu, albo od niego mnieyszy (35.) Ale przez podanie, ten pierwszy kąt nie iest ani równy, ani mnieyszy od drugiego, więc też i bok temu pierwszemu kątowi przeciwny, nie będzie ani równy, ani mnieyszy od drugiego boku; a przeto będzie większy od niego.

37. *Uwaga.* W tym twierdzeniu użyliśmy pierwszy raz dowodzenia *zbocznego*, albo *przez niepodobność*. Po łacinie piszący, nazywaią takie dowodzenie: *Demonſtratio indirecta*, albo *per abſurdum*. Okazuie ſię tym ſpoſobem, że wszelkie inne odmienne w tey mierze twierdzenie, byłoby fałszywym; a zatym to tylko iest prawdziwe, którego dowodziemy.

38. *Wnioſki.* Ponieważ w Troykącie proſtokątnym i w Troykącie roztwartokątnym, kąt proſty, i kąt roztwarty, ſą z trzech kątow naywiększemi; przeto też boki naprzeciwko takich kątow leżące, będą naywiększe. A ztąd

A ztąd między wszyſtkiemi liniiami poprowadzonemi od tegoż ſamego punktu, od iedney linii, naymnieysza ieſt linia proſtopadła. Inne linie pochyłe, tym większe będą, im dalsze od proſtopadłey. Dwie także linie pochyłe, równey wielkości, od Punktu tegoż ſamego poprowadzić można; a nie więcey, i te od proſtopadłey równie będą odległe.

Ztąd też wypływa, że linia proſta, nie może przecinać okrągu koła w więcey, iak we dwóch punktach, a to w tych, których odległość od ſrodka koła, równa ſię promieniowi tegoż koła; bo inaczey więcey niż dwie linie równe, możnaby poprowadzić od iakiego punktu do trzeciey linii.

39. *Defin:* Linia proſtopadła, ſpuſzczona od iakiego punktu na inną linią, nazywa ſię *odległością* tego punktu od linii, na którą ſpada; a to dla tego, że ta linia ieſt naykrótszą między wszyſtkiemi innemi, któreby od tegoż punktu można poprowadzić do tey ſamey linii.

40. *Twierdzenie* 8. W Troykącie ſumma dwóch boków, większa ieſt od boku trzeciego.

Niech

Niech będzie Troykąt ABC; Summa dwóch bokow AB, BC, większa ieſt od boku AC. *Fig.* 7.

Wykreślenie. Pociągnąwszy daley bok AB, weźmy BD, równą BC, i złączmy ich końce linią CD.

Dowodzenie. w Troykącie równoramiennym BCD, kąty C i D, ſą równe; więc w Troykącie ACD, kąt ACD, większy ieſt od kąta D; a zatym i bok AD, większy będzie od boku AC; a że AD równa ſię ſummie boków AB, BC, więc i ta ſumma boków większa ieſt od boku AC.

41. *Uwaga.* To twierdzenie ſłużyć nam może po części za obiaśnienie w tym, które iuż mamy naturalnym linii proſtey wyobrażeniu. Widziemy tu oczywiście, że linia proſta, która łączy dwa Punkta, mnieyſza ieſt, niżeli ſumma dwóch innych linii do tychże Punktow poprowadzonych od punktu takiego, który ſię nieznayduie na linii łączącey te dwa punkta.

42. *Twierdz:* 9. Jeżeli od ſrodka Linii proſtey wyprowadziemy proſtopadłą; każdy Punkt w tey proſtopadłey, będzie równo odległy od obydwóch końcow linii pierwszey; każdy zaś inny Punkt za tą

pro-

proſtopadłą wzięty, nie iednakową od tychże końcow odległość mieć będzie.

Fig. 8. Niech będzie proſtopadła CD, do środka C, linii AB.

Nayprzod: Odległości DA, DB, Punktu którегokolwiek D, wziętego na linii CD, od Punktów A i B. są równe.

Dowodzenie. W Troykątach ACD, BCD, kąty proſte przy C, są równe, i ramiona przy tych kątach równe, więc dwa te Troykąty mogą przyſtać do ſiebie; a zatym linie AD, i BD są równe.

Powtóre: Niech będzie Punkt E, za proſtopadłą DC, linie EA, EB, nierówne będą.

Niech linia AE, przechodzi przez Punkt D, należący do proſtopadłey CD; od Punktu tego poprowadźmy linią DB.

Dowodzenie. Linie AD, BD, są równe, iako ſię iuż dowiodło; a że linia AE, równa ſię ſummie Linii AD, DE, więc linia AE, większa ieſt od linii AD, a zatym i od linii BD, która tamtey ieſt równa.

Zwy-

Zwykło się krócey ieszcze to potwierdzenie tak wyrażać: *Linia prostopadła, z pośrodka innéy linii wyprowadzona, iest miejscem* (Locus) *wszystkich punktów oddalonych iednakowo od obydwóch końcow teyże linii.* (g)

43. *Zagadnienie* 3. Od punktu danego na linii prostey wyprowadzić linią prostopadłą.

Rozwiązanie. Weźmy na danéy linii dwa inne Punkta, iednakowo od punktu danego odległe; od każdego z tych dwóch punktów, iako od środka (a centro) iednakowym promieniem, większym iednak, niż iest odległość tych dwóch punktów od punktu danego, nakreślmy dwa łuki przecinaiące się. Punkt dany, i drugi w przecięciu znaleziony złączmy z sobą linią prostą, ta będzie prostopadłą, któréy szukaliśmy.

(g) *Ponieważ linia prosta, przez dane położenie dwóch Punktów, iest iuż tym samym wyznaczona; ieżeli tedy przez dwa inne Punkta, z których każdy iednakową ma od obydwóch punktów danych odległość, poprowadziemy linią, ta w środku linii łączącey dwa punkta dane, będzie prostopadłą.*

44. *Zagadnienie* 4. Od punktu danego za liniią proſtą, ſpuścić na nią liniią proſtopadłą.

Rozwiązanie: Znaydźmy dwa punkta na linii daney, iednakowo odległe od punktu danego; kreśląc od niego iako od ſrodka, iednakowym promieniem, dwa łuki przecinaiące we dwóch punktach linią daną; ſzukaymy innego ieſzcze punktu równie od dwoch przecięcia punktow odległego. Linia łącząca ten punkt znaleziony, i drugi dany; ieſt ta ſama proſtopadła, którey ſzukaliśmy.

45. *Zagadnienie* 5. 1. Na daney linii wyſtawić Troykąt równoboczny.

2. Na daney linii wyſtawić Tróykąt równoramienny, którego ieden bok ieſt wiadomy.

3. Na daney linii wyſtawić Troykąt, którego dwa inne nierówne boki ſą wiadome.

Rozwiązanie: 1. Z dwóch końców linii daney, promieniem równym teyże linii, pociągnąć trzeba po iedney ſtronie dwa łuki, i punkt ich przecięcia złączyć z końcami linii daney.

2.

2. Z dwóch końców linii daney, promieniem równym linii, która ma służyć za ramie Troykąta równoramiennego, pociągnąć dwa łuki, i od punktu ich przecięcia poprowadzić dwie linie do końców linii daney.

3. Z dwóch końców linii daney, promieniami odmiennemi, równemi w długości liniiom maiącym służyć za boki do Troykąta, pociągnąć dwa łuki, i od punktu ich przecięcia, poprowadzić dwie linie do końcow linii daney.

Przestroga. Summa dwóch linii danych, powinna być większa od trzeciey linii także daney. (40.)

46. *Definicya.* Gdy uważamy Troykąt, ile wystawiony iest na iakiey prostey linii; taka liniia nazywa się *Podstawą* (Basis) Tróykąta, a kąt naprzeciwko iey stoiący nazywamy *Wierzchołkiem Troykąta* (Vertex Trianguli.)

47. *Przystosowanie.* Przerysować Tróykąt dany.

Rozwiązanie: Weźmy ieden z boków Troykąta za Podstawę onego. Podstawę tę przenieśmy na insze mieysce; i od

końców iey promieniami, dwom innym bokom równemi, nakreślmy dwa łuki, a od punktu ich przecięcia, poprowadźmy dwie linie do końców podstawy; iuż tym samym przerysowany będzie Troykąt dany, na inny iemu we wszystkim równy.

48. *Zagadnienie 6.* Maiąc dany kąt iaki, zrobić mu drugi równy, któryby miał za iedno ramie linią daną, a za wierzchołek punkt na tey linii także dany.

Rozwiązanie. Zaczynaiąc od wierzchołka kąta danego, wziąść trzeba na iego ramionach dwie iakiekolwiek linie równe, i końce ich złączyć trzecią liniią. Zrobi się tym sposobem Troykąt. Od punktu danego na linii także daney, przenosi się długość, wzięta na iednym ramieniu kąta danego, i na niey iak na podstawie, przerysuie się Troykąt, pierwszemu ze wszystkim równy (47.)

49. *Przystosowanie.* 1. Zrobić Troykąt, którego wiadome są dwa ramiona, i kąt między niemi.

2. Zrobić Troykąt, którego wiadoma podstawa, i dwa przy niey kąty.

50. *Zagadnienie* 7. Zrobić Troykąt, którego dany iest kąt ieden, i dwa boki, ieden przyległy kątowi danemu, drugi naprzeciwko niego leżący.

Uwaga. Kąt dany może być *prosty*, *rozwarty*, albo ostry. W pierwszych dwóch razach, bok przeciwny kątowi danemu, powinien być większy od boku przy kącie będącego. (38) W trzecim razie, bok przeciwny kątowi, może być większy lub mnieyszy od drugiego. We wszystkich tych razach, zróbmy kąt równy danemu, i daymy mu za ramie, linią równą daney, a maiącey mu służyć za toż ramie.

Z końca tey linii promieniem równym bokowi danemu, który ma leżeć naprzeciwko kąta danego, pociągniymy łuk, któryby przecinał drugie tegoż kąta ramie. Punkt przecięcia oznaczy koniec drugiego ramienia kąta.

Niech będzie C wierzchołek kąta danego, linia CA równa linii daney za ramie tego kąta; i niech łuk kreślony od punktu A, iako od środka, promieniem równym linii drugiey daney (która ma służyć za bok przeciwny kątowi C) przecina drugie ramie w punktach B. i b. *Fig.* 9. *i* *Tab. III* *Fig.* 1, 2, 3.

1. Gdy kąt C iest *Prosty*; dwa Troykąty: ACB, ACb mogą przyſtać do ſiebie; bo liniie pochyłe równe AB, Ab, iednakowo ſą od proſtopadłey AC odległe, a zatym CB i Cb ſą równe.

W innych razach ſpuśćmy liniią proſtopadłą AD.

2. Gdy kąt C iest *Roztwarty*, albo oſtry, ale liniia AB, większa od AC; w tym razie liniie pochyłe i równe AB, Ab dalsze są od proſtopadłey AD, niżeli liniia pochyła AC; a zatym z dwóch Troykątow ACB, ACb, ieden tylko Tróykąt ACB wypełnia trzy założone *Warunki* (Conditiones.)

3. Gdy kąt C iest *oſtry*, ale liniia AB mnieyszą od AC; dwie liniie pochyłe i równe: AB, Ab, będą bliżſze proſtopadłey AD, niżeli liniia AC; a zatym Tróykąty ACB, ACb, lubo ſobie nierówne, obadwa iednak wypełnią trzy założone warunki.

Powtórzenie przypadków, w których dwa Troykąty mogą przyſtać do ſiebie, albo w których Troykąt wyznaczony iest przez wiadomość doſtateczną boków i kątów iego.

1. Dwa

1. Dwa boki i kąt między niemi.

2. Bok ieden i dwa przy nim kąty.

3. Trzy kąty.

4. Dwa boki i kąt Prosty nie między niemi zawarty.

5. Dwa boki i kąt roztwarty nie między niemi zawarty.

6. Dwa boki i kąt ostry nie zawarty między niemi, i gdy bok przeciwny danemu kątowi iest naywiększy.

7. Dwa boki i kąt ostry nie zawarty między niemi, i gdy bok przeciwny kątowi danemu iest naymnieyszy. (Ten przypadek iest wątpliwy) bo dwoiakim sposobem Troykąt czyni zadosyć trzem warunkom.

51. *Uwaga* 1. Nietylko z tych, któreśmy tu wymienili wiadomości, ale i z innych ieszcze wyznaczyć można Troykąt Te iednak, które się tu wspomniały przypadki, nayczęściey zdarzać się zwykły, i wszystkie inne mogą się pod nie podciągnąć.

Cztery ostatnie przypadki mogą być ściągnione do iednego. (Obacz w Rozdz: 10. Twierdz: 5.) Ale przy początkach lepiey ie osobno podawać.

52. *Uwaga* 2. Same tylko Troykąty są takiemi figurami, gdzie wiadomość trzech boków iuż iest dostateczna do wyznaczenia Troykąta. Okazać to w prostym przykładzie można na *Czworoboku*, albo *Czworokącie* (Quadrilaterum,) którego wszystkie boki są równe. Chociaż albowiem wiedzieć będziemy boki wszystkie tego Czworoboka, nie potrafiemy iednak oznaczyć iaki Czworokąt ztąd wyniknie, bo tym bokom różne dać możemy nachylenie, a zatym i Czworokątowi odmienną dać możemy figurę. Tak nap: ieżeli damy mu kąty wszystkie proste, zrobi się *Kwadrat*, ieżeli damy dwa kąty ostre, a dwa roztwarte, zrobi się Czworokąt pochyły tym bardziey, im ostrzsze iedne kąty, a drugie roztwartsze mieć będzie.

53. *Twierdz*: 10. Linia prosta przecinaiąca kąt na dwie części równe, każdy w sobie punkt mieć będzie iednakowo odległy od obydwóch ramion tegoż kąta; a wszelki inny nie na tey linii Punkt, nie tak odległy będzie od iednego ramienia tego kąta, iak od drugiego.

Fig. 4. Niech będzie kąt: ACB, który na dwie części przecina linia CD; ieżeli Punkt iaki na niey, naprzykład D, weźmiemy, linie prostopadłe DE, DF, do ramion tego k[illegible]zczone, będą równe.

Dowodz: Dwa Troykąty proſtokątne CDE, CDF, które bok CD ſpólny maią, i kąty przy C równe, mogą przyſtać do ſiebie (18.) więc linie DE, DF, ſą równe.

Niech znowu będzie Punkt G, nie w linii CD; proſtopadłe GE, GH, będą nierówne.

Niech albowiem proſtopadła GE, ſpotyka w punkcie D, linią CD, która na dwie części dzieli kąt ACB. Od Punktu D, ſpuśćmy proſtopadłą DF, i poprowadźmy GF.

W Troykącie DFG, ſumma linii FD, DG, większa ieſt od boku FG; ale ta ſumma linii FD, i DG, równa ſię linii EG, więc linia EG, większa ieſt od linii FG. Aże znowu linia GF, większa ieſt od linii GH, (38.) więc tym bardziey Linia EG, większa będzie od linii GH.

54. *Uwaga*. Linia proſta, która przedziela kąt na dwie równe części, nazywa ſię *Miesyſcem* wſzyſtkich Punktów, których odległość iednakowa ieſt od dwóch linii danych.

55. *Zagadn.* 8. Dany maiąc kąt, na dwie części go podzielić.

Rozą-

Rozwiązanie. Od wierzchołka tego kąta, wziąwszy na ramionach iego dwie linie równe, z końców ich kreślę dwa łuki iednakowym promieniem. Przez ich przecięcie, i przez wierzchołek kąta, prowadzę linią, ta dzielić będzie kąt na dwie równe części.

56. *Wniosek.* Będzie też można każdą z tych połowę podzielić daley na dwie równe części, te znowu na dwie i t. d. Przeto każdy kąt może być (przynaymniey myślą) podzielony, na 2, 4, 8, 16, i t. d. części równych.

ROZDZIAŁ III.

O Liniach równo-odległych i o równoległo-bokach.

57. *Twierdzenie* 1. Niech będzie linia prosta, od którey dwóch punktów wychodzą dwie linie prostopadłe. Te prostopadłe nigdzie się nie zniydą, choćbyśmy ie naybardziey przedłużali.

Dowodz: Gdyby te prostopadłe, gdzie się zeszły, zrobiłyby z trzecią linią, od którey są wyprowadzone, Troykąt maiący dwa kąty proste; a to iest niepodobna.

58.

58. *Defin:* Dwie linie na *Płaszczyznie* (Planum) poprowadzone, gdy się zeyść z sobą nie mogą, nazwane są *Równoodległe* (Parallelæ.)

W ogulności zaś mówiąc: iakiekolwiek liniie dwie proste od trzeciey przecięte iednakowo z iedney strony nachylaiące się do tey trzecicy linii, są równoodległe.

59. Niechby naprzykład liniie CF, DG, przecięte w punktach A, i B, od linii HE, miały kąty, CAE, DBE, równe; te dwie liniie nie mogą się nigdzie zeyść z sobą. Gdyby albowiem gdzie się zeszły, w Troykącie z nich i z trzeciey linii AB złożonym, byłby kąt zewnętrzny DBE, równy iednemu z wewnętrznych CAE; co być nie może. (31.)

60. *Wniosek:* Ponieważ kąt HBG, równa się kątowi DBE, (16.) a kąt HAF, kątowi CAE można podobnie dowieść, że liniie CF, DG, nie zeydą się ani z drugiey strony linii HE.

61. *Defin:* Kąty DBE, CAE, nazwać można *Iednostronne*, podobnie, iako i kąty: DBH, CAH; EBG, EAF; GBH, FAH, kąty: DBH, CAE, nazywaią się *Wewnętrzne* (Interni) takie też są i kąty: FAE, GBH.

GBH. Kąty: FAE, DBH, nazwać można kątami na przemian, to iest na przemian leglemi (po łacinie zowią ſię *Alterni*, toż nazwiſko daie ſię i kątom CAE, CBH.

Te Definicye znać dobrze Uczniowie powinni.

62. Kąty przyległe: DBE, DBH, czynią razem dwa kąty proſte; (14.) ale że kąt DBE równa ſię kątowi CAE, dla równey pochyłości obydwóch linii DB, i CA, do linii HE, więc i kąty wewnętrzne: DBH, CAE, razem wzięte równe będą dwom kątom proſtym.

63. Kąty w wierzchołku przeciwne DBE, HBG, ſą równe (16.) więc i kąty na przemian CAE, HBG równe będą.

64. Pierwsze Twierdzenie można i tak wyrazić: że ieżeli dwie linie proſte przecięte przez linią trzecią, czynić będą z nią kąty iednoſtronne równe, albo kąty na przemian równe, albo że dwa kąty wewnętrzne równać ſię będą ſummie dwóch kątow proſtych; takie dwie linie będą równo odległe.

65. *Zagadn:* 1. Daną maiąc iednę linią, poprowadzić drugą równo odległą, przez punkt dany.

Niech

Niech będzie linia dana BC, i punkt A także dany; przez ten Punkt poprowadzić linią równoodległą, od linii daney BC. *Fig. 6.*

Rozwiązanie. Przez Punkt A ciągniymy iakążkolwiek liniią, naprzykład AD, do BC. Przy Punkcie A, zróbmy kąt DAE, równy kątowi ADC. Linia AE, będzie tą równoodległą, którey szukaliśmy.

Dowodz: Kąty na przemian DAE, ADC, są równe, więc linie BC, AE, są równoodległe.

66. *Twierdz:* 2. Jeżeli kąty iednostronne CAE, IBE, nie są równe, choćby też i bardzo nieznaczna była ich różnica, wszelako iednak linie AC, BI, zniydą się gdziekolwiek z sobą; albo (co na iedno wychodzi) ieżeli summa kątow wewnętrznych IBH, CAE, mnieysza, albo większa iest od dwóch kątów prostych, tedy dwie linie CF, IL, zniydą się z tey strony linii HE, gdzie ta summa iest mnieysza od dwóch kątów prostych. *Tab: IV. Fig. 1.*

Na dowodzenie tego Twierdzenia wyszukali od dawnych czasow dowcipy swoie Geometrowie, i pospolicie fałszywie go dowodzili; bo będąc to Twierdzenie w sobie tak iasne, można było i bez

bez dowodzenia na nie przyſtać. Można iednak dowieść go bez popadnienią omyłce; ale dowody te tak długie, że ciąg i związek ich, wielkiego natężenia, uwagi, i rozumu wyciągaiący, znudziłby uczniow tym bardziey, im mniey przeświadczeni byliby o pożytku i potrzebie tego dowodzenia. Rozumiem, idąc w tym za przykładem Euklidesa, że lepiey ieſt mieć to Twierdzenie za oczywiſte, zwłaszcza dowiodłszy iuż dwóch innych Podań *odwrótnych*, (Propoſitio inversa) pierwszego: że, gdy linie ſchodzą ſię z ſobą, kąty iednoſtronne ſą nie równe; drugiego: że, gdy kąty iednoſtronne równe ſą, liniie z ſobą ſię zeyść nigdzie nie mogą.

67. *Wnioſek.* Jeżeli dwie liniieſą równoodległe, a trzecia ie przecina, kąty iednoſtronne będą równe; kąty na przemian także równe; i kątów dwóch wewnętrznych ſumma równać ſię będzie ſummie dwóch kątów proſtych. Jeden z tych trzech wnioſkow przypuściwszy, przypuścić trzeba i dwa drugie, tak, iak w pierwszym Twierdzeniu. Jakoż, gdyby którakolwiek z tych trzech równości kątów, nie była prawdziwa, iużby tym ſamym linie zeyść ſię gdzie z ſobą mogły, to ieſt nie byłyby równoodległe.

De-

Defin: Czworokąt, którego boki naprzeciwko siebie leżące są równoodległe, nazywać będziemy *Równoległobokiem.* (Parallelogrammum.) Linią, która łączy wierzchołki dwóch kątów przeciwnych, nazwiemy *Przekątną* (Dianogalis.)

68. *Twierdz:* 3. W każdym Równoległoboku, boki przeciwne, i kąty przeciwne są równe.

Niech będzie Równoległobok ABCD; mieć on będzie boki AB, i DC równe; boki AD, i BC także równe, i kąty przeciwne A i C, iako też B i D, równe.

Przygotowanie. Poprowadźmy przekątną AC.

Dowodz: Dwa Troykąty: ACB, CAD, mogą przystać do siebie; maią albowiem bok AC spolny, kąty na przemian ACD, CAB, równe, i kąty na przemian CAD, ACB także równe; a zatym (23.) i linije AB, DC są równe, iako też i linije AD, BC; kąty także B i D równe, i kąty A i C iako składaiące summę kątow względem siebie równych w obydwóch Troykątach, także równe.

69. *Wniosek* 1. Przekątna dzieli Równoległobok na dwa Troykąty równe,

to

to iest takie, które przystać do siebie mogą.

70. *Wniosek* 2. Jeżeli dwie linie są równoodległe, spuściwszy od dwóch punktów iedney, dwie prostopadłe do drugiey, te prostopadłe równe będą.

71. *Wniosek* 3. Jeżeli Równoległobok ma ieden kąt prosty, wszystkie też inne kąty iego proste będą; a ieżeli dwa iego boki przyległe, są równe, wszystkie także boki równe będą.

72. *Defin:* Równoległobok, którego kąty są proste, nazywa się *Prostokątem* (Rectangulum.)

Prostokąt, którego wszystkie boki są równe, zowie się *Kwadratem*. Równoległobok, który ma kąty nierówne, zachowuie nazwisko Równoległoboku; lubo czasem z przydatkiem się wyraża, że iest Równoległobokiem *Ukośnym* (Obliquangulum.) Równoległobok ukośny, którego boki wszystkie są równe, nazwany być może *Kwadratem ukośnym* (Rhombus.)

Fig. 2. 73. *Twierdz:* 4. Jeżeli w Czworokącie boki przeciwne są równe, taki Czworokąt będzie Równoległobokiem.

Niech

Niech będzie Czworokąt: ABCD, którego boki przeciwne AB, CD, są równe, i boki przeciwne AD i BC także równe, ten Czworokąt będzie Równoległobokiem.

Przygotowanie. Poprowadźmy Przekątną AC.

Dowodz: W Troykątach: ACD, CAB, boki trzy w iednym równe są trzem bokom w drugim; (68.) więc przystać do siebie mogą; (25.) w szczególności zaś kąty na przemian CAB, ACD są równe, więc liniie AB, CD są równoodległe; podobnie i liniie BC, AD są także Równoodległe.

74. *Twierdz:* 5. Jeżeli w Czworokącie dwa boki przeciwne są równe, i równoodległe, taki Czworokąt iest równoległobokiem.

Niech będzie Czworokąt ABCD, którego boki przeciwne AB, CD są równe, i równoodległe, ten Czworokąt iest Równoległobokiem.

Przygotowanie. Poprowadźmy Przekątną AC.

Dowodz: Dwa Troykąty: ACD, CAB, maią bok AC spolny, boki AB i CD równe, i kąty na przemian: ACD, CAB, zawarte między temi bokami, równe; więc przystać do siebie mogą; (18.) a w szczególności, kąty: CAD, ACB będą równe, że zaś są na przemian, więc liniie AD i CB są równoodległe.

75. *Uwaga.* Czworokąt może mieć dwa boki równoodległe, a dwa inne równe, a nie być przeto Równoległobokiem, chyba w ten czas, gdy boki przyległe bokom równoodległym, są prostopadłe. Widzieć to można na Figurze 3, gdzie lubo Czworokąt ABCD, ma boki dwa przeciwne: AB i CD równoodległe, boki AD i BC równe, nie iest iednak Równoległobokiem.

76. *Zagadn*: 2. Maiąc daną liniią prostą, postawić na niey Kwadrat.

Rozwiązanie. Z końca iednego linii daney, wyprowadźmy prostopadłą iey równą. Z drugiego końca tey daney linii i prostopadłey, iako do środka promieniem równym daney linii, nakreślmy dwa łuki okręgu, i Punkt ich przecięcia złączmy z końcem linii daney i prostopadłey.

Dowo-

Dowodz: Czworokąt tak zrobiony, będzie miał wszystkie boki równe, i kąt ieden prosty, więc będzie Kwadratem.

77. *Zagadn*: 3. Wykreślić prostokąt, którego boki są dane.

Sposób wykreślenia iest ten sam, co wyżey, (76.) z tą różnicą, że prostopadła powinna mieć długość daną, a nie być równą podstawie; promienie także łukow kreślić się maiących, ieden powinien być równy podstawie, a drugi prostopadłey.

78. *Zagadn*: 4. Wykreślić Równoległobok, którego kąt iest wiadomy, i boki.

Sposób wykreślenia tym tylko różni się od poprzedzaiącego, że zamiast prostopadłey, poprowadzić potrzeba liniią z tym nachyleniem, któreby czyniło kąt dany.

ROZDZIAŁ IV.

O kątach w Figurach Prostokreślnych, a w szczególności w Troykątach.

Widzieliśmy, (31.) że kąt zewnętrzny Troykąta, większy iest od iednego z dwóch kątów wewnętrznych iemu przeciwnych; dowiedziemy teraz, że ten kąt zewnętrzny równa się obydwom kątom wewnętrznym na przeciw siebie leżącym.

Fig. 4. 79. *Twierdz*: 1. Niech będzie Troykąt: ABC, a kąt iego zewnętrzny: CBD; ten kąt równy iest summie dwóch kątów wewnętrznych: A i C.

Przygotowanie. Poprowadźmy BE, równoodległą od AC.

Dowodz: Kąty na przemian C i CBE są równe; równe także i kąty iednostronne: A i EBD; więc summa kątów: C i A, równa iest summie kątów: CBE i EBD, to iest kątowi zewnętrznemu CBD.

80. *Twierdz*: 2. W każdym Troykącie, summa trzech kątów równa iest dwom kątom prostym.

Niech

Niech będzie Troykąt: ACB; ſumma trzech iego kątów, równa ſię ſummie dwoch kątow proſtych.

Przygotowanie. Pociągniymy daley AB, naprzykład aż do D.

Dowodz: Już ſię dowiodło, że kąt zewnętrzny CBD, równa ſię dwom kątom wewnętrznym A i C; więc ſumma kątów CBD, i CBA, równać ſię będzie ſummie kątow: A, C, i CBA; ale ſumma dwóch pierwszych kątów, iako przyległych; wyrównywa dwom kątom proſtym, więc i druga trzech kątów ſumma, tymże dwom kątom proſtym ieſt równa. (h)

81.

(h) *To Twierdzenie ieſt bardzo wielkiey wagi, przeto trzeba, aby iak naydokładniey zrozumieli ie Uczniowie, iako i inne Twierdzenia, od których dowiedzenie tego zawiſło. Tu podobno mieyſce byłoby pokazania związku Twierdzeń dotąd podanych iednych z drugiemi, który to związek iſtotny ieſt poſtępowaniu Geometrycznemu. Cwiczenia, które poprzedziły, iuż powinny były dać poznać Uczniom ten ſpoſob poſtępowania. Trzeba iednak często im związek*

81. *Wnioſek* 1. W Troykącie równobocznym, każdy w ſzczególności kąt, ieſt trzecią częścią dwoch kątów proſtych, albo $\frac{2}{3}$. kąta iednego proſtego, to ieſt, każdy waży 60. ſtopni.

82. *Wnioſek* 2. W Troykącie, znaiąc dwa kąty, iuż tym ſamym znany i kąt trzeci.

Przykład. Niech będzie Troykąt, którego kąt ieden ma ſtopni 50, a drugi 72, ſumma tych dwóch kątów będzie 122. Różnica zaś 122. od dwóch kątów proſtych, albo od 180. ieſt 58, i ta ieſt ważność trzeciego kąta.

83. *Wnioſek* 3. W Troykącie równoramiennym, znaiąc kąt ieden, poznamy zaraz i dwa drugie.

Przy-

---

takowy okazywać, i iak ſię iedna prawda z drugiey odkrywa. Ztąd naywiększy pożytek z Matematyki odnieść mogą, i nabiorą prawdziwego ducha Matematycznego, co nierównie pożyteczniey im będzie, iak mieć nawet wiadomość ſamey Matematyki.

Przykład. Niechby kąt ieden przy wierzchołku ważył 40°, w Troykącie równoramiennym. Już tym samym dwa inne ważą 140°, aże są równe, każdy z nich ważyć będzie połowę, to iest 70°.

Niechby znowu kąt ieden przy Podstawie ważył 64°, i drugi przy Podstawie ważyłby 64°. Summa tych dwoch kątów byłaby 128°, a różnica między 180°, i 128°. to iest 52°, pokazałaby ważność kąta trzeciego.

84. *Defin:* Figura maiąca wi cey niż cztery boki, albo kąty, naz wa się *Wielokątem* (Polygonum.)

85. *Twierdz:* 3. Ważność summy kątów wszystkich w Figurze *Prostokreśl. ney* (Figura Rectilinea.) zawisła od liczby boków teyże Figury. Liczbę tę boków podwoiwszy, i odciąwszy od podwoioney liczbę: 4; reszta okaże w kątach prostych ważność kątów wszystkich Figury prostokreślney. Nim się przystąpi do

do ogulnego dowodzenia, trzeba zacząć od przypadków szczegulnych w sposób podobny następuiącemu.

Niechby naprzykład Figura Prostokreślna miała tylko cztery boki, to iest niechby tylko była Czworokątem. Poprowadziwszy w niey Przekątną, ta podzieli Czworokąt na dwa Troykąty, w których summa kątów razem wzięta, będzie równa summie kątów w Czworokącie. Aże ta summa kątów w dwóch Troykątach, waży cztery kąty proste, więc i summa kątów w Czworokącie ważyć także będzie cztery kąty proste.

Niechby Figura miała pięć boków, to iest była *Pięciokątem* (Pentagonum.) Poprowadźmy od iednego wierzchołku, do dwóch drugich przeciwnych dwie Przekątne; podzielą one Pięciokąt na trzy Troykąt, których summa ważności kątów, to iest 6. kątów prostych, będzie też summą ważności kątów Pięciokąta.

Dowodzenie ogulne. Od wierzchołku kąta któregokolwiek w Wielokącie, poprowadźmy tyle przekątnych, ile można. Postrzeżemy łatwo, że Troykątów liczba z tego podziału wynikaiąca, mnieysza będzie dwoma, od liczby boków Wie-

Wielokąta; albowiem od kąta tego, od którego się prowadziły Przekątne, nie można ich było prowadzić do dwóch innych kątów naybliższych, boby tylko przykryły sobą dwa naybliższe boki, a to ramiona tego kąta, i nie zrobiły Troykątów. Ponieważ zaś w każdym Troykącie ważność trzech kątów, równa się ważności dwóch kątów prostych będzie więc dwa razy tyle zawierało się (co do ważności) kątów prostych, w Wielokącie, ile się zawiera w nim Troykątów. Aże liczba Troykątów, mnieysza iest dwoma, od liczby boków Wielokąta; więc liczba kątów prostych, w tymże Wielokącie, będzie dwa razy tak wielka, to iest będzie się równać liczbie boków podwoionych, odtrąciwszy od niey dwa razy 2. to iest 4; a zatym ważność kątów wszystkich Wielokąta w kątach prostych znaydziemy odeymuiąc liczbę 4, od liczby podwoioney boków tegoż Wielokąta. (i)

Twier-

(i) *Dowodzenie to mogłoby się wydawać trudnym, gdyby go wiele przykładów na Wielokątach szczegulnych nie poprzedziło, i Figury na każdy szczegulny przykład kreślone nie obiaśniły. Wiele iednak na tym zawisło, aby i bez*

86. *Twierdz:* 4. Pociągnąwszy daley w iednę ſtronę boki wszyſtkie Wielokąta, iakażkolwiek będzie liczba boków iego, zawsze

---

Figury przyuczali ſię Uczniowie dawać ſprawę z tego, czego ſię nauczyli, a tym ſpoſobem aby wprawiali ſię w zachowanie dobrego porządku, tak w wyobrażeniach, które ſobie czynić będą, iako też i w ſamych wyrazach. Szczegulnieyszego zaś ſtarania przykładać trzeba, aby bardziey rozumem, niż pamięcią wſzyſtko to, czego ſię uczyć będą, ogarnywali. Z tey przyczyny przy rozwiązaniu niektórych zagadnień, opuszczało ſię umyślnie Figury. Niech iednak ztąd nie wnoszą Nauczyciele, aby wcale bez Figur obeyść ſię mogło; i owszem niech przyuczaią Uczniów, aby ie ſami ſobie kreślić umieli z pamięci, zrozumiawſzy pierwey Twierdzenia, do których dowodzenia ſtoſować ſię maią te Figury. Przykłady dotąd przytoczone, tym ſpoſobem ſię podawały, którym potrzeba, aby i Uczniowie dawali ſprawę z działań iuż dobrze od ſiebie poiętych. Odpowiedz naypoſpolitsza młodych ieſt, tych nawet, którzy lepiey rzecz przenikaią: Umiem ia to, ale ſię wytłomaczyć nie mogę.

zawsze iednak ſumma kątów zewnętrznych, zamkniętych między bokiem iednym i przedłużeniem drugiego przyległego, ważyć będzie cztery kąty proſte. (k)

Nim ſię przyſtąpi do ogulnego Dowodzenia, trzeba pierwey na ſzczegulnych przykładach tego Twierdzenia dowieść; zacząwszy od Troykąta, w którym każdy kąt z ſwoim zewnętrznym przyległym waży dwa kąty proſte; a że kątów ieſt w Troykącie trzy, więc z przyległemi ważyć będą ſześć kątów proſtych; trzy zaś kąty, które ſię w Troykącie znayduią, ważą dwa kąty proſte; więc te, ktore ſą za Troykątem, to ieſt zewnętrzne, ważyć będą cztery kąty proſte.

Dowodzenie ogulne. Każdy kąt wewnętrzny w wielokącie, z ſwoim zewnętrznym przyległym, waży dwa kąty proſte; więc ſumma wſzyſtkich kątów tak wewnętrznych, iako i zewnętrznych, waży dwa kąty proſte wzięte tyle razy, ile ieſt boków w Wielokącie; a zatym ſum-

(k) *Mówię tu tylko o wielokątach, w których kąt każdy mnieyszy ieſt od dwóch kątow proſtych; to ieſt o takich, w których kąty ſą wyſkakuiące* (Salientes.)

ſumma ſamych kątów zewnętrznych, ważyć będzie tyle, ile brakuie ſummie kątów wewnętrznych, aby ważyła dwa kąty proſte wzięte tyle razy, ile ma boków Wielokąt. Ale że, (iakośmy w poprzedzaiącym Twierdzeniu dowiedli;) brakuie do tego tey ſummie kątów cztery; więc ſumma kątów zewnętrznych Wielokąta ważyć będzie cztery kąty proſte.

87. *Uwaga* 1. Nayważnieyſzey wagi ſą te przypadki, w których kąty wſzyſtkie Wielokąta ſą równe. Każdy w tym razie kąt zewnętrzny, waży 4. kąty proſte, podzielone przez liczbę boków Wielokąta. Ważność zaś każdego kąta zewnętrznego znaydziemy, odtrąciwſzy ten wieloraz, to ieſt: ważność iednego kąta zewnętrznego od dwóch kątów proſtych.

Jeżeli wſzyſtkie kąty wielokąta ſą równe, tedy im większy będzie każdy kąt iego zewnętrzny, tym mnieyſzy będzie wewnętrzny, a im mnieyſzy tamten, tym ten większy.

Po dowiedzionych tych Twierdzeniach, łatwo będzie Uczniom ułożyć ſobie Tablicę ważności kątow tak wewnętrznych, iako i zewnętrznych w tych wielokątach, w których kąty wſzyſtkie ſą równe, i mo-

mogą tę ważność wyrazić, czyli to przez kąty proſte, czyli przez ſtopnie.

88. *Uwaga* 2. Umieiąc dowieść dwóch Twierdzeń poprzedzaiących, można rozwiązać i to, co naſtępuie zadanie:

Jak wielorakim ſpoſobem około Punktu danego napełnić można mieyſce (to ieſt cztery kąty proſte) przez kąty Figury Proſtokreślney iednego gatunku, (1) y którey wſzyſtkie kąty ſą równe?

1. Gdy Troykąt ma wſzyſtkie boki równe, czyli ieſt Równobocznym; każdy z kątów iego waży trzecią część dwoch kątów proſtych, albo $\frac{2}{3}$ iednego kąta proſtego; a zatym ſześć takich kątów, uczyni 4. kąty proſte, i napełni mieyſce około Punktu iednego.

2. Gdy Czworokąt ma wſzyſtkie kąty równe, czyli ieſt Proſtokątem; każdy z ką-

(1) *Mówię* iednego gatunku, *ponieważ gdyby wolno było mieszać kąty różnych Wielokątów, możnaby* 14. *ſpoſobami napełnić mieyſce około iednego Punktu, używaiąc tych tylko Wielokątów, które kąty wszyſtkie równe maią.*

kątów iego iest kątem prostym, a zatym 4. takie kąty ważyć będą 4. kąty proste.

3. Kąt zewnętrzny Pięciokąta, którego kąty wszystkie są równe, waży $\frac{1.}{5.}$ część czterech kątów prostych, albo $\frac{4.}{5.}$ iednego kąta prostego, a zatym każdy kąt wewnętrzny, ważyć będzie: $1\frac{1.}{5.}$ kąta prostego. Trzy takowe kąty, czynią tylko 3. kąty proste i $\frac{3.}{5.}$ co iest mniey iak 4, a cztery takie kąty, czynią 4. kąty proste i $\frac{4.}{5.}$, co iest więcey iak 4. Przeto kątami Pięciokąta, maiącego wszystkie kąty równe, nie można napełnić mieysca około Punktu iednego.

4. Kąt zewnętrzny Sześciokąta, którego kąty wszystkie są równe, waży $\frac{1.}{6.}$ część czterech kątów prostych, albo $\frac{2.}{3.}$ iednego kąta prostego; a zatym każdy kąt wewnętrzny ważyć będzie: $1\frac{1.}{3.}$ kąta prostego. Trzy zaś takowe kąty, czynią zupełnie cztery kąty proste.

Jeże-

Jeżeli Wielokąt ma więcey niż 6. boków, każdy z kątów iego wewnętrznych, będzie większy od kąta w sześciokącie; trzy więc takowe kąty uczynią więcey niż 4. kąty proste; aże kąt Wielokąta maiącego boki wszystkie równe, iest zawsze mnieyszy od 2. kątow prostych; więc dwa takie kąty nie wystarczą na napełnienie mieysca około Punktu iednego.

Przeto trzema tylko sposobami rozwiązać można wzwyż wyrażone Zadanie; to iest przez 6. kątów Troykąta, przez cztery kąty Czworokąta, i przez trzy kąty Sześciokąta. *Fig. 5, 6. i Tab. V. Fig. 1.*

Natura sama nauczyła Pszczoły układać w ulu komórki w sześciokąty.

ROZDZIAŁ V.

O Równoległobokach i Troykątach równych co do Powierzchni; i o zamienieniu iakiegykolwiek Figury Prostokreślney na Troykąt i na Równoległobok.

Widzieliśmy w Rozdziale drugim przypadki, w których dwa Troykąty mogą przystać do siebie; i być zatym co do Powierzchni, równe. W Rozdziale trze-

trzecim widzieliśmy także, iako dwa Równoległoboki, które miały i boki i kąty równe mogły przystać do siebie; i że zatym Powierzchnie ich równe były. Te przypadki przystawania iednych Figur do drugich były tylko, co do równości Powierzchni, przypadkami szczególnemi; ogulnieysze zaś w tey mierze Twierdzenia będą rzeczą tego Rozdziału.

89. *Twierdzenie* 1. Dwa Równoległoboki zrobione na iedneyże Podstawie, a z przeciwney strony zakończone przez Liniią równoodległą od postawy, maią Powierzchnie równe.

Fig. 2, 3, 4. Niech będą dwa Równoległoboki: ABCD, ABEF, których taż sama iest Podstawa AB, a kończy ie z drugiey strony, równoodległa od Podstawy Linia: DE. Te dwa Równoległoboki, maią równe Powierzchnie, iakażkolwiek boków ich długość będzie.

Dowodz: Troykąty: DAF, CBE, mogą przystać do siebie; boki albowiem AD, BC są równe, bo naprzeciwko leżące w Równoległoboku ABCD; boki też AF, BE, równe, bo naprzeciwko leżące w Równoległoboku ABEF. Kąty oprócz tego iednostronne: ADF, BCE, i AFD, BEC. równe.

Od-

Odiąwszy tedy osobno Troykąt DAF, i Troykąt iemu równy CBE, od całey Figury ABED; reszty będą równe, to iest Równoległobok AFEB. równy będzie Równoległobokowi ABCD.

To Twierdzenie możnaby obiaśnić Figurą z papieru grubego wyrobioną, i zacząć od przypadku, który wyraża Figura 2, gdzie punkta C i F razem przypadaią. W takim razie Troykąty: ACD, BEC równe są pierwszy i drugi Troykątowi: ABC, a zatym i sobie są równe; więc tak równoległobok ABCD, iako i ABEF złożony iest z dwóch Troykątów równych.

90. *Defin*: Ponieważ liniie prostopadłe spuszczone od któregokolwiek Punktu linii, na drugą liniią równoodległą, są równe; ieżeli więc od punktu któregokolwiek w boku Równoległoboku spuścimy do boku przeciwnego liniią prostopadłą, ta prostopadła iednakowey zawsze będzie wielkości, i nazywa się *Wysokością* tego Równoległoboku, względem drugiego boku, do którego iest spuszczona, i który wzięty iest za Podstawę tegoż Równoległoboku. Twierdzenie poprzedzaiące możnaby też i tak wyrazić: *Dwa Równoległoboki maiące spolną Podstawę, i wysokość iednakową, są równe.*

91. *Twierdznie* 2. Dwa Równoległoboki są równe, których Podstawy i wysokości równe.

92. *Dowodz*: Do Podstawy iednego z tych Równoległoboku, przyłożmy Podstawę drugiego; przystaną zupełnie do siebie te Podstawy, bo są równe; będą więc te postawione na sobie Równoległoboki miały spólną Podstawę, i równą wysokość, a zatym według pierwszego Twierdzenia będą równe.

93. *Twierdz*: 3. Jeżeli dwa Równoległoboki zrobione na iedney Podstawie, równe maią Powierzchnie, równe też i wysokości mieć będą.

Fig. 5. Niech będą dwa Równoległoboki ABCD, ABEF, których obydwóch Podstawa iest AB, i równa Powierzchnia; maią one i wysokość iednakową, to iest zakończone są przez tę samę linią równoodległą od Podstawy.

Dowodz: Gdyby Punkta F i E, nie były na linii DC, albo na iey przedłużeniu; toby inne iakie Punkta naprzykład H, i G. linii AF, BE, były na teyże linii DC, a zatym Równoległoboki ABCD, ABGH, byłyby równe. Aleśmy wzieli za

za równe Równoległoboki ABCD, i ABEF; więc i Równoległoboki ABEF, i ABGH byłyby równe, co iest niepodobna, chyba że Punkta H i G, będą te same, co i Punkta F i E.

W ogulności mówiąc: Dwa Równoległoboki, maiące równe Podstawy i Powierzchnie, maią też i równe wysokości; a gdy znowu Równoległoboki mieć będą wysokości i Powierzchnie równe, i Podstawy ich równe będą.

94. *Twierdz*: 4. Gdy Troykąt i Równoległobok, stoi na teyże samey Podstawie, a wierzchołek Troykąta przypada na boku równoodległym od Podstawy i należącym do Równoległoboku, albo na przedłużeniu tegoż boku; taki Troykąt iest połową Równoległoboku.

Niech będzie Równoległobok ABCD, a Troykąt ABE; maiący z nim spólną podstawę AB; i niech wierzchołek E, Troykąta przypada na boku DC należącym do Równoległoboku; Troykąt ten ABE; będzie połową Równoległoboku ABCD. *Tab. VI. Fig. 1.*

Przygotowanie. Przez B poprowadźmy BF, równoodległą od AE, którąby spotkała DC, w F.

Dowodzenie. Troykąt ABE, iest połową Równoległoboku ABFE, ponieważ bok BE Troykąta iest Przekątną Równoległoboku: ABFE. Aże Równoległoboki ABFE, ABCD, ſą równe, więc Troykąt ABE, iest także połową Równoległoboku ABCD.

95. *Defin:* Proſtopadła ſpuszczona od wierzchołku Troykąta do Podſtawy, nazywa ſię *wysokością* tego Troykąta. Twierdzenie tedy powyższe takby mogło być inaczey wyrażone: *Jżeli Równoległobok i Troykąt maią ſpolną Podſtawę, i wysokość równą, Troykąt ten będzie połową Równoległoboku.*

96. *Wniosek.* Można więc przyſtosować wszyſtko do Troykątów, cokolwiek ſię o Równoległobokach powiedziało. I tak:

1. Dwa Troykąty maiące równe Podſtawy i wysokości, równe mieć będą i Powierzchnie.

2. Dwa Troykąty równe w Powierzchniach, i w wysokościach albo w Podſtawach: będą też miały równe Podſtawy lub wysokości.

W ogulności zaś mówiąc: z tych trzech ilości; z Podſtawy, wysokości, i powierz-

wierzchni Równoległoboku lub Troykąta, dwie którekolwiek wiadome, trzecią poznać daią; iedna zaś nie iest dostateczna, aby z niey dwie drugie wyznaczyć można. Obaczemy daley w tym Rozdziale: iako można zrobić tyle Równoległoboków równych i równokątnych ile zechcemy, chociaż boki nierówne mieć będą. (m)

97. *Zagadn:* I. Maiąc dany Równoległobok, zamienić go na Prostokąt, któryby tę samę miał Podstawę i Powierzchnią.

Rozwiązanie. Od obydwóch końców Podstawy, wynieśmy liniie prostopadłe, aż do boku Podstawie przeciwnego; zrobi się Prostokąt równy Równoległobokowi, co do Podstawy i Powierzchni.

Podobnym sposobem postąpić sobie potrzeba, chcąc zamienić Równoległobok dany na drugi równy pierwszemu w Podstawie i w Powierzchni, gdy inny iakikolwiek kąt przy Podstawie, a nie prosty dany będzie.

98.

(m) *Trzeba to dobrze dać poznać Uczniom, że wielkość Równoboków i Troykątów nie zawisła od ich obwodu (Perimeter) omyłki w tey mierze częste zwykły bywać.*

98. *Zagadn:* 2. Troykąt dany zamienić na inny Prostokątny, któryby miał tę samę Podstawę i Powierzchnią.

Rozwiązanie. Przez wierzchołek Troykąta danego, poprowadźmy równoległą od Podstawy, a od końca któregokolwiek teyże podstawy, wynieśmy prostopadłą aż do równoległey; Punkt przecięcia tych dwóch linii, będzie wierzchołkiem Troykąta szukanego.

Podobnym sposobem postąpiemy sobie chcąc zamienić Troykąt dany na drugi równy mu w Podstawie i w Powierzchni: gdy inny a nie prosty kąt przy Podstawie dać będzie potrzeba temu drugiemu Troykątowi.

99. *Zagadn:* 3. Zamienić Troykąt dany, na Równoległobok prostokątny, któryby miał albo tę samę co Troykąt podstawę, albo tę samę wysokość.

Rozwiązanie. Równoległobok prostokątny, któryby miał tę samę Podstawę, i wysokość, co Troykąt; byłby dwa razy tak wielki; a zatym Równoległobok ten, którego szukamy, powinien mieć tę samę Podstawę co Troykąt, a połowę iego wysokości; albo też tę samę wysokość a połowę tylko Podstawy.

100. *Zagadn:* 4. Czworokąt dany zamienić na Troykąt teyże ſamey powierzchni.

Rozwiąz: Poprowadźmy w Czworokącie danym przekątną, a przez wierzchołek iednego z kątów iey przeciwnych, pociągniymy równoległą od teyże przekątney. Wszyſtkie Troykąty maiące za podſtawę tę przekątną Czworokąta, a wierzchołek na równoodległey od tey przekątney będą równe w Powierzchni Troykątowi, który czyni ta przekątna z dwoma bokami Czworokąta ſchodzącemi ſię na równoodległey (96.) a zatym będzie też równy w powierzchni temu Troykątowi i Troykąt maiący za Podſtawę tę ſamę co i tamten przekątną, a za bok ieden, maiący przedłużenie aż do równoległey, boku Czworokąta leżącego z drugiey ſtrony przekątney; ten Troykąt oſtatni dodawszy do Troykąta z drugiey ſtrony przekątney leżącego, zrobi ſię Troykąt równy co do powierzchni Czworokątowi danemu; bo ponieważ Troykąty dwa, na które ieſt Czworokąt przez przekątną podzielony, równaią ſię co do powierzchni całemu Czworokątowi; więc temuż Czworokątowi równy także będzie co do powierzchni i Troykąt przez przekątną w Czworo-

rokącie uczyniony; a drugi równy w powierzchni Troykątowi drugiemu wchodzącemu także w Czworokąt i onego dopełniaiącemu.

Fig. 2. Niech będzie naprzykład ABCD Czworokąt dany; poprowadziwszy przekątną BD, i od niey równoległą CE, przez wierzchołek C, kąta DCB; gdy bok AB Troykąta drugiego w Czworokącie pociągniemy aż do zeyścia się z równoodległą CE w punkcie E; zrobi się Troykąt ADE równy co do powierzchni Czworokątowi ABCD.

101. *Uwaga.* Tym sposobem postąpiemy sobie, chcąc zmnieyszyć iednym bokiem Figurę iaką prostokreślną, bez odmienienia iey powierzchni. Poprowadziemy nayprzod przekątną, któraby odcięła Troykąt ieden w Figurze podaney; potym przez wierzchołek tego Troykąta pociągniemy równoodległą od tey przekątney, aż do zeyścia się teyże równoodległey z bokiem drugim przyległym do przekątney; naostatek złączemy punkt przecięcia z drugim końcem teyże przekątney.

Można nawet użyć sposobu tego do zamienienia iakieykolwiek Figury prostokreślney,

kreślney, na Troykąt teyże samey, co i podana Figura powierzchni; a to zmnieyszaiąc nayprzod iednym bokiem Figurę podaną; potym odeymuiąc znowu bok ieden, zmnieyszoney iuż iednym bokiem Figurze i t. d. póty, póki do trzech tylko boków, to iest do Troykąta nie przyiedziemy.

Przykład. Niechby trzeba zamienić Pięciokąt ABCDE na Troykąt teyże samey powierzchni. *Fig.* 3.

Poprowadźmy przekątne: DB, DA, przez C i E pociągniymy równoodległe CG, EF, aż do ich zeyścia się z linią AB przedłużoną w Punktach G i F; złączmy te punkta z końcami przekątnych, przez DG i DF. Troykąt DFG będzie równy w powierzchni Pięciokątowi danemu.

102. *Wniosek.* Widzieliśmy, (99.) że Troykąt może być zamieniony na Równoległobok prostokątny, maiący tę samę co i Troykąt powierzchnią; a zatym można każdą Figurę prostokreślną zamienić zawsze na prostokąt nie różniący się od niey w powierzchni, mogąc ią pierwey zamienić na Troykąt.

103. *Uwaga.* Niechby nam podano dwie iakie Figury proſtokreślne, którebyśmy iuż zamienili obydwie na Proſtokąty; i niechby te dwa proſtokąty miały albo podſtawy, albo wysokości równe. Łatwo nam będzie zrobić taki znowu proſtokąt, któryby równy był w powierzchni, ſummie albo różnicy tych dwóch Figur podanych. Proſtokąt albowiem, któryby miał podſtawę równą ſummie albo różnicy Podſtaw w obydwóch mnieyszych Proſtokątach (gdyby ich wysokości były równe) i tę ſamę co one wysokość, byłby równy w powierzchni ſummie tych Figur, lub ich różnicy. Wkrótce ſię także pokaże, iż można zamienić Proſtokąt ieden na drugi, któryby był pierwszemu równy w Powierzchni, a miał w ſobie bok ieden dany; a zatym można zawsze dwa Proſtokąty do tego przyprowadzić, aby miały ieden bok równy w obydwóch; przeto można zawsze i Proſtokąt taki zrobić, któryby równy był w powierzchni dwóm albo więcey Figurom proſtokreślnym podanym.

104. *Twierdz:* 5. W iakimkolwiek Proſtokącie, poprowadziwszy przekątną, a przez iey punkt którykolwiek pociągnąwszy dwie równoodległe od boków proſtokąta, będą równe w powierzchniach

dwa

dwa prostokąty, przez te równoodległe zrobione, a ztykaiące się w wierzchołku dwóch kątów przeciwnych.

Niech będzie Prostokąt ABCD, przez punkt E, przekątney poprowadziwszy równoodległe: HF, GI; Prostokąty HEGD, FEIB będą równe w powierzchniach. *Fig:* 4.

Dowodz: Troykąty ACD, CAB są równe. Pierwszy składa się z Troykątów CEG, EAH, i z Prostokąta HEGD. Drugi składa się z Troykątów ECF, AEI, i z Prostokąta FEIB. Aże Troykąt CEG, równy iest Troykątowi ECF, a Troykąt EAH, równy Troykątowi AEI; więc i Prostokąt HEGD, równy będzie Prostokątowi EFIB.

Twierdzenia podobnego poprzedzaiącemu, gdy równoległobok nie będzie prostokątny, tymże samym sposobem dowieść można.

105. *Zagadn:* 5. Dany Prostokąt zamienić na inny teyże samey powierzchni, któryby miał za bok, linią daną.

Niech będzie Prostokąt ABCD; ten zamienić trzeba na inny, w którymby linia dana za bok służyła. *Fig:* 5.

Roz-

Rozwiąz: Pociągniymy daley bok AB, aż do E, tak, aby linia BE, równa była linii daney. Dopełniymy Prostokąta DEFC, i poprowadźmy przekątną FB, którąby spotkała w punkcie G, bok przedłużony AD; weźmy potym FI, równą DG, i złączmy punkta G, i I, liniią GI. To uczyniwszy, Prostokąt EBHI, równy będzie co do powierzchni Prostokątowi ABCD, i za bok ma liniią daną BE. Że równe są te dwa Prostokąty, można okazać podobnym iak w ostatnim twierdzeniu sposobem.

106. *Uwaga* 1. Aby dodać dwa Prostokąty maiące boki odmienne; trzeba nayprzód ieden z tych prostokątów zamienić na inny równey z nim powierzchni, i któryby miał bok ieden równy bokowi prostokąta drugiego nie zamienianego. Wziąwszy potym za wysokość, ten bok równy w dwóch Prostokątach, a za Podstawę, summę dwóch innych boków odmiennych; zrobi się Prostokąt równy co do powierzchni summie dwóch Prostokątów danych. Podobnie się postępuie, chcąc mieć ich różnicę.

107. *Uwaga* 2. Gdyby Prostokąty dane były Kwadratami; a Prostokąt równy ich summie miał też być Kwadratem; po-

prze-

przedzaiące wiadomości, nie dosyć byłyby na rozwiązanie tego zagadnienia. Niżey obaczemy, iak sobie w takim razie postąpić trzeba. (Obacz w Rozdz: VIII.)

108. *Przystosowanie.* Nie powtarza się tu, co się iuż powiedziało w Arytmetyce o mierzeniu Prostokątów, których boki są w liczbach, wyrażone. Przystosowanie teraźnieysze ściągać się będzie do Równoległoboków iakichkolwiek, i do Troykątów, wyrażaiąc podstawy ich i wysokości w liczbach.

Aby doyść powierzchni Czworokąta, którego przekątna i prostopadła od wierzchołku kąta iey przeciwnego spuszczona, w liczbach iest dana; trzeba rozmnożyć tę przekątną przez połowę summy obydwóch prostopadłych; albo połowę przekątney, przez summę tychże prostopadłych; albo nakoniec całą przekątną przez całą summę prostopadłych rozmnożyć, i rozmnożoney liczby wziąść połowę. Gdyby Czworokąt miał dwa boki równoodległe; powierzchnia iego byłaby równa Prostokątowi maiącemu za wysokość odległość tych dwóch Równoległych, a za Podstawę połowę summy dwóch boków przeciwnych Czworokąta, których wiemy odległość.

Przy-

Fig: 6. *Przykłady.* 1. Niech będzie ABCD, Równoległobok *Pochyłokątny* (obliquangulum) którego Podstawa AB, ma długości łokci 37. a wysokość DE łokci 20; powierzchnia iego będzie $20 \times 37. = 740.$ łokci kwadratowych.

2. Niech powierzchnia Równoległoboku ABCD zawiera łokci kwadratowych 378. Podstawa AB, niech ma długości łokci 27. wysokość DE, będzie $\frac{378.}{27.} = 14.$ łokci.

3. Niech będzie powierzchnia Równoległoboku ABCD $= 544.$ łokci kwadratowych; wysokość DE $= 17.$ łokci. Podstawa AB, będzie $= \frac{544}{17.} = 32.$ łokci.

4. Niech znowu Równoległoboku ABCD podstawa będzie łokci 23. stop 1. cal: 10. to iest $23.\frac{11}{12}$ łokci, wysokość DE łokci 14. stop. 1. cal: 8. to iest $14.\frac{5}{6}.$ łokci; powierzchnia będzie $14.\frac{5}{6}$ razy $23.\frac{11}{12}$ $= 354.\frac{55}{72}$ łokci kwadr: $=$ 354. łok: kw: 3. stop. 8. cal:

5.

5. Niech powierzchnia Równoległoboku ABCD będzie = 8433. sznur: Kwad: 72. pręt: kw: = 8433, 72. sznur: kwad: podstawa AB = 153. sznur: 9. pręt: = 153, 9. sznur: wysokość DE, będzie = $\frac{8433,\ 72.}{153,\ 9.}$ = 54, 8. sznur: = 54. sznur: 8. pręt:

6. Niech powierzchnia Równoległoboku ABCD, będzie = 315, 3, 58. Ł. K. St: Kw. Cal: Kw: = 315. $\frac{245}{288.}$ Ł. K. wysokość DE = $\frac{11}{12}$ Łok:

Łok: 15. St: 1. Cal: 10. = 15. Łok:

podstawa będzie = $\frac{90965.}{4584}$ Łok: = 19. Łok:

Stop: 1. 8. $\frac{49}{191.}$ Cal:

7. Niech będzie ABC Troykąt, którego podstawa AB, = 28 łokci. a wysokość CD = 16. łokci. Powierzchnia iego będzie połową 28. przez 16. rozmnożonych, czyli = 28 × 16. = 28 × 8. = 224. Łok. kw: 2 *Tab: VII. Fig. 1.*

8. Niech będzie powierzchnia Troykąta ABC = 156. stop kw: a podstawa AB = 24.

24. ſtop. Wysokość CD, będzie $= \frac{156!}{\frac{1}{2} \times 24} =$ $\frac{312}{24.}$ albo $\frac{156}{12.} = 13.$ ſtop.

9. Niech będzie powierzchnia Troykąta ABC $= 195.$ Ł. kw: a wyſokość CD $=$ 15. łokci. Podſtawa AB będzie $= \frac{195}{\frac{1}{2} \times 15.}$ $= \frac{390}{15.} = 26.$ Ł. kw:

10. Niech będzie ABC Troykąt, któ-

	pręt:	łok:	cal:
rego podſtawa AB $=$	12,	2,	2.

$= 12. \frac{5}{18.}$ pręt: Wyſokość $= 7. \frac{5}{6.}$ pręt: powierzchnia będzie $= 7. \frac{5}{6.} \times 6. \frac{5}{36} =$ $48. \frac{19}{216.}$ pręt: kw: $= 48.$ pręt: kw: 4. łok: kw: 3. ſtop. 114. cal: kw:

11. Niech będzie powierzchnia Troy-

	Ł. kw:	cal: kw:		łok: kw:
kąta ABC $=$	25.	32.	$=$	$25\frac{1}{8}$

	Ł.	cal:	linii	Łokci.
podſtawa AB $=$	9.	2.	8.	$= 9. \frac{1}{9.}$

wysokość CD będzie $= \frac{451}{82.} = 5.$ Ł. 1. ſto:

12.

12. Niech będzie powierzchnia Troykąta = 21. fzn: kw: 17. pręt: kw: Wysokość CD = 5. fzn: 8. pręt: podstawa AB będzie = $\frac{21, 17.}{2, 9.}$ albo $\frac{42, 34.}{5, 8.}$ = 7, 3. fzn: 7. szn: 3. pręt:

13. Niech będzie *Różnobok* (Trapezium) ABCD maiący tylko równoodległe boki AB, CD; - bok AB = 35. łok. Fig. 2.
bok CD = 17. łok.

A zatym fumma ich = 52.
Wysokość DE = 14.
Powierzchnia tego Czworokąta będzie = $\frac{14 \times 52.}{2.}$ = 7 × 52, albo 14 × 26. = 364. ł. kw:

14. Aby powierzchnia takiego Czworokąta zawierała 255. cal: kw: którego boki dwa równoległe fą:
jeden AB = 23. cal:
drugi CD = 11.

A zatym fumma = 34.
Trzeba mu dać wysokość = $\frac{255}{17.}$ = $\frac{510}{34.}$ = 15. cal.

15. Aby zaś powierzchnia takiego Czworokąta zawierała 325 Stop: kw:

gdy podstawa AB = 31. stop, a wysokość ED = 13. trzeba, aby summa boków równoodległych była = $\frac{325}{\frac{1}{2} \times 13.}$ = $\frac{650}{13.}$ = 50. stop: Aże bok AB = 31. stop. więc CD będzie = 19. stop.

16. Niech w takowym Czworokącie ABCD boki równoodległe będą;

AB = 20. pr: 4. ło. 1. st. 6. cal.
CD = 13. 5. 1. 4.

A zatym summa = 34. 2. 1. 10. = 34. $\frac{7}{18.}$ pręt:

Wysokość DE = 9. 5. 1. 8. = 9. $\frac{7}{9}$.

Powierzchnia będzie = 9. $\frac{7}{9.}$ × 17. $\frac{7}{36}$ = 168. $\frac{10}{81.}$ pręt: kw: 168. pręt: kw: 6. łok: kw: st: kw: 112. cal: kw:

Fig. 3. 17. Niech będzie Czworokąt iakikolwiek ABCD, którego przekątna DB = 86. łokci; prostopadłe zaś do niey spuszczone; - - AE = 39.
- - - CF = 25.
A zatym ich summa AE+CF = 64. łok: Powierzchnia tego Czworokąta będzie = $\frac{64 \times 86.}{2.}$ = 32. × 86. albo 64. × 43. = 2752. łokci kw:

18. Niech znowu będzie przekątna AB = 26. fzn: 8. pręt: 6. łok: = 26. $\frac{22}{25}$. fzn:
Prostopadłe: AE = 13. fzn: 7. pręt: 5: łok:
CF = 11. 9. 6. $\frac{1}{2}$.

A zatym AE + CF = 25. 7. 4
= 25. $\frac{113}{150}$. fznur:

Powierzchnia Czworokąta ABCD będzie = 25. $\frac{113}{150}$. × 13. $\frac{11}{25}$. = 346. $\frac{78}{628}$. fzn: kw:

19. Niech w Pięciokącie ABCDE będzie bok - AE = 128. łok: *Fig.* 4.

Przekątne: AC = 79.
CE = 81.

Prostopadłe: CH = 49.
BF = 42.
DG = 39.

Znaydziemy Powierzchnie Troykątów:

AEC = 49 × 64. = 3136. łok: kw:
ABC = 21 × 79. = 1659.
EDC = 39 × 81. = 1579. $\frac{1}{2}$.

A zatym Powierzchnia Pięciokąta ABCDE będzie = 6374. $\frac{1}{2}$. ło: kw:

Fig. 5. 20. Niech w Sześciokącie ABCDEF będą

Przekątne: $\begin{cases} AC = 200. \text{ łok:} \\ AE = 125. \end{cases}$

Prostopadłe: $\begin{cases} BG = 23. \\ DH = 80.\frac{1}{2}. \\ DI = 64.\frac{3}{4}. \\ FK = 42. \end{cases}$

A zatym $BG + DH = 103.\frac{1}{2}.$ łok:

$DI + FK = 106.\frac{3}{4}.$

Znaydziemy Powierzchnie Czworokątów:

$\begin{cases} ABCD = 103.\frac{1}{3}. \times 100. = 10350. \text{ł. kw:} \\ ADEF = 53.\frac{3}{8}. \times 125 = 6671.\frac{7}{8}. \end{cases}$

Powierzchnia tedy całego Sześciokąta będzie $= 17021.\frac{7}{8}.$ łok: kw:

Inaczey następuiącym sposobem znaleść można Powierzchnią Sześciokąta: ABCDEF.

Niech

Niech będzie

Fig: 6.

		szn:	pręt:	łok:	
bok AB	=	20.	0.	0.	
Równoodległe: Części prostopadłey DN. FG	=	23.	7.	$3.\frac{1}{8}$.	
CH	=	23.	2.	$2.\frac{13}{16}$.	
EI	=	12.	2.	$2.\frac{3}{16}$.	$= 12.\frac{11}{48}$ Sz: kw:
DK	=	2.	4.	$7.\frac{7}{24}$	$= 2\frac{179}{360}$.
KL	=	4.	6.	$6.\frac{1}{4}$.	$= 4.\frac{41}{60}$.
LM	=	1.	0.	$3.\frac{3}{4}$	$= 1.\frac{1}{20}$
MN	=	7.	8.	$5.\frac{5}{6}$.	$= 7.\frac{79}{90}$.

A zatym AB+FG = 43. 7. $3.\frac{1}{8} = 43.\frac{89}{20}$.

FG+CH = 46. 9. $5.\frac{15}{16}$. $= 46.\frac{47}{48}$.

CH+EI = 35. 4. 5. $= 35.\frac{5}{17}$.

Więc Troykąt DEI = $1.\frac{179}{720}$ x $12\frac{11}{48}$ =

$15.\frac{9313}{34560}$ szn: kw:

Czworo

Czworokąty. EICH = $2.\frac{41}{120}$. × $35.\frac{7}{15}$. = $83.\frac{23}{450}$

CHFG = $1.\frac{1}{20}$ × $23.\frac{47}{96}$ = $24.\frac{85}{128}$.

ABGF = $3.\frac{169}{180}$. × $43.\frac{89}{120}$ = $172.\frac{6341}{21600}$.

Sz: kw:

Cały więc Sześciokąt ABCDEF = $295.\frac{41}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{041}$.

Fig. 7. 21. Niech będzie Siedmiokąt ABCDEFG, w którym następuiące wymiary znalezliśmy, to iest:

Części przekątney AD: AH = $32\frac{2}{3}$ stopy.
HI = 35.
IK = $15.\frac{1}{3}$.
KL = $81.\frac{1}{6}$.
LM = $11.\frac{5}{6}$.
MD = $13.\frac{1}{3}$.

Prostopadłe: GH = $78.\frac{1}{2}$.
BI = $56.\frac{1}{3}$.
FK = 64.
EL = $86.\frac{1}{3}$.
CM = $45.\frac{5}{6}$.

stop: kw:

Będą tedy Troykąty: AHG = $16.\frac{1}{3}$. × $78.\frac{1}{2}$. = $1282.\frac{1}{6}$.
ABI = $28.\frac{1}{6}$. × $67.\frac{1}{3}$. = $1905.\frac{1}{18}$.
DLE = $43.\frac{1}{6}$. × $25.\frac{1}{6}$ = $1086.\frac{1}{36}$.
CMD = $6.\frac{2}{3}$. × $45.\frac{5}{6}$. = $305.\frac{5}{9}$.

Czwo-

Czworokąty: { HKFG = 26.$\frac{1}{2}$. × 142.$\frac{1}{2}$. = 3568.$\frac{1}{4}$.
KLEF = 81.$\frac{1}{2}$. × 75.$\frac{1}{2}$. = 6151.$\frac{1}{32}$.
BCMI = 109. × 51.$\frac{1}{12}$. = 5568.$\frac{1}{12}$.

A zatym cały Siedmiokąt ABCDEFG = 19885.$\frac{1}{2}$. ſtop: kw:

PRZYGOTOWANIE DO ROZDZIAŁOW NASTĘPUIĄCYCH.

O podnieſieniu liczby do Kwadratu i wyciągnieniu z niey pierwiaſtku kwadratowego.

Lubo nauka, która ſię tu wykładać będzie, ma częſte używanie w wyższych rachunkach, bardziey iednak ieſt potrzebna w Geometryi. W naſtępuiących Rozdziałach, różne zdarzą ſię użycia iey okoliczności. Tam fundamenta, na których ſię zaſadza, łatwiey zrozumiane będą, niż gdyby na zawilszych działaniach rachunkowych były okazane, zwłaszcza, gdy ieszcze Algebra uczniom ieſt nieznaioma.

109. *Defin:* Kwadrat liczby ieſt to ta ſama liczba przez ſiebie rozmnożona. Okazać to można z Geometryi, w którey aby znaleść pole Kwadratu, trzeba rozmnożyć przez ſiebie liczbę znaczącą wielkość boku tegoż Kwadratu.

Y tak dziewiąciu liczb pierwszych:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Kwadraty ſą:	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.
Liczb:	10.	20.	30.	40.	50.	60.	70.	80.	90.
Kwadraty ſą:	100.	400.	900.	1600.	2500.	3600.	4900.	6400.	8100.
Tych też:		1000.		2000.		3000.	- -	9000.	
Kwadraty będą.		100000.		4000000.		9000000.	- - -	81000000.	

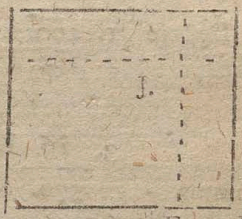
110. Ztąd ſię wnoſi, że kwadraty liczb, które iednę cyfrę maią, a resztę zerów, ſkładaią ſię z kwadratu teyże ſamey cyfry, i z tyle dwoie naſtępuiących zerów, ile ich było w tey liczbie.

111. Gdy ſię robi Kwadrat z liczby, naprzykład z 37, mnożąc 37. przez 37; mnoży ſię nayprzód 7. przez 7. to ieſt robi ſię Kwadrat z 7. potym mnoży ſię 30. przez 7. daley 7. przez 30. albo drugi raz znowu 30. przez 7. naoſtatek mnoży ſię 30. przez 30. to ieſt bierze ſię Kwadrat z 30. Jeſt tedy liczba rozmnożona 1369. kwadratem trzydzieſtu ſiedmiu, złożonym z kwadratu trzydzieſtu, z liczby 30. rozmnożoney dwa razy przez 7. i z kwadratu 7. Ta reguła ieſt ogulna ściągaiąca ſię do kwadratów liczb wszyſtkich, które na dwie części podzielić można.

Niech

Niech będzie naprzykład liczba 5. którą uważam jak złożoną z 1. i z 4. kwadrat iey może być uważany, iakby się składał z tych trzech liczb: 1. 8. 16. Pierwsza 1. iest kwadratem z 1. druga 8. iest liczbą rozmnożoną dwa razy z 1. przez 4. trzecia 16. iest kwadratem z 4. Jakoż summa tych trzech liczb 1. 8. 16. iest: 25. a 25. iest kwadratem z 5. Gdybyśmy uważali 5, iako zbior z tych dwóch liczb 2. i 3; kwadrat z 5, brałby się tym samym za summę z tych trzech liczb: 4. 12. 9. która summa iest także 25. Liczba 4. byłaby kwadratem z 2, liczba 12. byłaby z rozmnożenia dwa razy 2. przez 3, a liczba 9. byłaby kwadratem z 3.

Toż samo widocznie pokazać się może sposobem Geometrycznym.



Niech linija AB będzie na mieyscu liczby iakiey składaiącey się z tylu iedności, ile pewnych części zamyka w sobie taż linia AB. Linii tey części: AE, EB, niech zastępuią części dwie, które tę liczbę składaią; zrobimy kwadrat ABCD z linii AB, a wziąwszy

wszy liniią AF równą AE, pociągniymy przez F i E dwie linie FG, i EK, równoodległe od boków kwadratu, i przecinaiące ſię w punkcie J. Kwadrat AEIF. będzie z części AE, linii AB. Kwadrat IGCK, będzie z części EB, linii teyże AB. Proſtokąty: FIKD, EBGI, będą obadwa z linii: AE i EB, to ieſt z części iedney, linii AB i z części drugiey.

112. Wygodna rzecz ieſt, liczbę, którey kwadratu ſzukamy rozłożyć na iedności, dzieſiątki, ſta, i t. d.

Przykład 1. Chcę mieć kwadrat z 24.

Rozkładam tę liczbę na dzieſiątki, i na iedności, to ieſt na 20. i na 4.

Będzie 1. 400. kwadrat z dzieſiątków.
2. 160. liczba dwa razy rozmnożona z dzieſiątków przez iedności.
3. 16. Kwadrat z iedności.

Summa - - 576. Kwadrat z 24.

Przykład 2. Chcę mieć kwadrat z 36.

1. 900. Kwadrat z 30.
2. 360. dwa razy 30. przez 6. rozmnożone.
3. 36. Kwadrat z 6.

Summa - - 1296. Kwadrat z 36.

Przy-

Przykład 3. Chcę mieć Kwadrat z 324.

1.	90000.	Kwadrat z 300.
2.	12000.	Dwa razy 300. przez 20.
3.	400.	Kwadrat z 20.
4.	2560.	Dwa razy 320. przez 4.
5.	16.	Kwadrat z 4.
Summa - - -	104976.	Kwadrat z 324.

Przykład 4. Chcę mieć Kwadrat z 4687.

1.	16000000.	Kwadrat z 4000.
2.	4800000.	Dwa razy 4000. przez 600.
3.	360000.	Kwadrat z 600.
4.	736000.	Dwa razy 4600. przez 80.
5.	6400.	Kwadrat z 80.
6.	65520.	Dwa razy 4680. przez 7.
7. - -	49.	Kwadrati z 7.
Summa - - -	21967969.	Kwadrat z 4687.

113. *Uwaga* 1. Postrzedz łatwo możemy w tych przykładach, że każda liczba składaiąca po części kwadrat cały, ma iednym zero mniey, niżeli ta, która ią poprzedziła; a zatym cyfra iedna w każdey liczbie niższey występuie bardziey ku prawey ręce, niż w tey, która iest nad nią.

Wi-

Widziemy zatym, że możnaby opuścić zera, pisząc cyfry same tym sposobem iedne pod drugiemi, aby w każdym rzędzie niższym, cyfra iedna w prawą coraz bardziey wychodziła. I tak opuściwszy zera w przykładzie ostatnim tym porządkiem szłyby same cyfry.

16.
48.
36.
736.
64.
6552.
49.

Summa 21967969.

2. W pierwszym rzędzie, gdzie iest 16. opuszczaiąc zerów sześć, a zatym 16. znaczy 16. millionow, to iest Kwadrat z 4000. czyli z pierwszego po lewey ręce znaku liczby 4687. W drugim rzędzie gdzie iest 48. opuszcza się zerów pięć, a zatym 48. znaczy 4. milliony 8. kroć sto tysięcy, i dla tego 4. piszą się pod iednościami millionow, a 8. występuie. Ta zaś liczba 48. pochodzi z rozmnożenia pierwszego po lewey ręce znaku 4, liczby 4687. przez drugi znak 6, teyże liczby dwa razy wzięty. W trzecim rzędzie opuszcza się zerów cztery, a zatym 36. znaczy trzykroć sto tysięcy, i 6. dzie-

dzie-

siątków tysięcy, i dla tego 3. piszą się pod stema tysiąców, a 6. występuie. Ta zaś liczba 36. znaczy kwadrat drugiego po lewey ręce znaku 6. liczby 4687. W czwartym rzędzie opuszcza się zerów trzy, a zatym 736. znaczy siedmkroć trzydzieści sześć tysięcy; i dla tego 3. piszą się pod dziesiątkami tysiąców, a 6. występuie. Ta zaś liczba 736. pochodzi z rozmnożenia dwóch pierwszych po lewey ręce znaków 46. liczby 4687, przez 8, trzeci znak teyże liczby dwa razy wzięty i t. d.

3. W takowym liczb ułożeniu, idąc od dołu do góry, to iest zaczynaiąc od 49; w pierwszym rzędzie, pierwsza po prawey ręce cyfra 9. znaczy iedności; w drugim rzędzie 2. znaczy dziesiątki; w trzecim rzędzie 4. znaczy sta, w czwartym rzędzie 6. znaczy tysiące i t. d.

4. Ta sama liczba 49. w pierwszym od dołu rzędzie znaczy kwadrat z iedności 7; i prawa iey cyfra 9. naybardziey występuie. Trzecia w tym porządku liczba 64. iest kwadratem z dziesiątków 8, i przeto prawa iey cyfra 4, iako znacząca sta, mniey występuie, niżeli obydwie cyfry 49. kwadratu z samych iedności. Piąta w porządku liczba 36. iest kwadratem ze

stow

ſtow 6; i przeto prawa iey cyfra 6. iako znacząca dzieſiątki tyſiąców, ma przed ſobą kwadraty z dzieſiątków i z iedności. Nakoniec ſiódma i naywyższa liczba 16. ieſt kwadratem z tyſiąców 4. i przeto prawa iey cyfra 6. ma przed ſobą kwadraty ze ſtow, dzieſiątków i iedności. W ſummie więc 21,967.969. na mieyſcach nie parzyſtych, od prawey ręki rachuiąc kończyć ſię będą kwadraty z liczb poiedyńczych, z których ſię ſkłada cały kwadrat; to ieſt kwadrat z iedności kończyć ſię będzie tam, gdzie oſtatnie po prawey ręce 9. napisane; kwadrat z dzieſiątków tam, gdzie ieſt drugie 9; kwadrat ze ſtów tam, gdzie ieſt 6; kwadrat z tyſiąców, gdzie 1.

5. Dla podobney przyczyny w ſummie teyże 21.967.969. kwadrat wyrażaiącey (rachuiąc zawsze od prawey ręki) na mieyscach parzyſtych, drugim, czwartym, ſzóſtym i t. d. kończyć ſię będą liczby pochodzące z rozmnożenia poiedyńczych znaków, z których kwadrat uroſł, przez te wſzyſtkie, które ie poprzedzały.

Trzeba to ieſzcze bardziey obiaśnić na wielu innych przykładach kwadratów, tymże ſamym co wyżey porządkiem części ich układaiąc.

114. *Wnioſek* 1. Gdy tedy mamy liczbę iaką kwadratową, możemy doyść z iak wielu znaków liczebnych przez ſiebie rozmnożonych uroſł ten kwadrat; to ieſt możemy doyść wielości znaków pierwiaſtku kwadratowego. Po łacinie taki pierwiaſtek zowie ſię (Radix quadrata.) Doydziemy zaś tego, oddzielaiąc kreſkami albo kropkami od prawey ręki zacząwszy po dwa znaki liczebne. Liczba takich oddziałów pokaże wielość znaków liczebnych pierwiaſtku. Naprzykład liczba 576, będzie miała dwa oddziały, które tak oznaczam 5,76. a zatym pierwiaſtek iey z dwóch ſię ſkłada znaków. Pierwiaſtek tey liczby: 10,49,76. będzie miał trzy znaki liczebne, bo w niey trzy oddziały zrobić można. Pierwiaſtek liczby 21,96,79,69. micć będzie cztery znaki, bo cztery także w nim oddziały uczynić można, i t. d.

115. *Wnioſek* 2. Ponieważ w mieyſcach nieparzyſtych liczby kwadratowey, kończą kwadraty znaków poiedyńczych tę liczbę ſkładaiących, mogą zaś znaki liczebne w kwadracie być nie parzyſte; więc w takim razie; w pierwszym zaraz od lewey ręki znaku kwadratu, znaleść można znak pierwszy pierwiaſtku tegoż kwadratu; a zatym oddzielaiąc kreſkami co dwie liczby, od prawey ręki do lewey,

wey, na ostatni oddział, może tylko przypaść znak jeden liczebny. Tak iak wyżey widzieliśmy w tym kwadracie 5,76.

PRZYKŁAD V.

116. Niechby z tey samey liczby: 576. wyciągnąć trzeba było pierwiastek kwadratowy. Ta liczba mogąc mieć dwa oddziały, będzie też miała dwa znaki w pierwiastku, to iest znak dziesiątków, i znak iedności. Pierwszy znak pierwiastku taki być powinien, aby kwadrat iego nie przechodził 5. stów; taki kwadrat iest 4. sta, albo 400, którego pierwiastek, 2. dziesiątki, albo 20. Kwadrat 400, pierwszego tego znaku pierwiastkowego 20. odiąwszy od 576. zostanie 176, Ta reszta pozostała powinna ieszcze zamykać w sobie drugi znak pierwiastku rozmnożony przez pierwszy 20. dwa razy wzięty, i nadto kwadrat tegoż drugiego znaku; więc ieżeli przez tenże znak 20, dwa razy wzięty, to iest przez 40. podzielemy resztę 176, wieloraz pokaże drugi znak pierwiastku złożony z iedności. Podzieliwszy 176, przez 40. wieloraz będzie 4. iedności. Te 4. iedności rozmnożywszy przez 40, wypadnie 160, które 160. odiąwszy od 176. zostanie 16. W tey reszcie 16. znaydować się ieszcze powi-

nien.

nien kwadrat znaku pierwiaſtkowego iednoſci 4. to ieſt 16. a że ſię znayduie zupełnie, więc cały pierwiaſtek kwadratu 576. będzie: 24.

Wzór działania.

5,76|20.
400 kwadrat z 20.

40|176|4.
160 z rozmnożenia 40 przez 4.

16. Reszta.
16. Kwadrat z 4.

0.

Tymże ſpoſobem wyciągnąć można pierwiaſtek kwadratowy z tey liczby 144.

Wzór działania.

1,44|10.
100 kwadrat z 10.

20|44|2
40 z rozmnożenia 20. przez 2.

4. Reſzta
4. Kwadrat z 2.

0.

Niechby potrzeba wyciągnąć pierwiaſtek, z kwadratu: 692224.

Oddzieliwſzy iak wyżey kreſkami co dwie liczby od prawey ręki, będzie trzy oddziałow, a zatym i trzy znaki w pierwiaſtku. Kwadrat naybliżey przyſtępuiący do 69. ieſt 64, którego pierwiaſtek ieſt 8; więc 8 ſtów, będzie znakiem pierwſzym pierwiaſtku. Odiąwſzy kwadrat 8. ſtów, to ieſt 640000. od 692224, zoſtanie 52224. Ta reſzta powinna zamykać pierwſzy znak 800 pierwiaſtku dwa razy wzięty, przez drugi znak dzieſiątkow rozmnożony; i kwadrat drugiego znaku pierwiaſtku; powinna ieſzcze zamykać dwa te pierwſze znaki ſtów i dzieſiątkow rozmnożonych przez trzeci znak iedności dwa razy wzięty, i nakoniec kwadrat znaku tegoż iedności. Wſzczegulności zaś mówiąc, powinna zamykać 800, dwa razy wzięte, to ieſt 1600. rozmnożone przez znak dzieſiątkow, którego ſzukamy. Podzieliwſzy tedy 52224, przez 1600. znaydziemy na wieloraz 30, albo 3 dzieſiątki; a zatym 3 dzieſiątki będą znakiem drugim Pierwiaſtku. 1600. rozmnożone przez 30, czynią 48000, które od 52224 odiąwſzy, zoſtanie 4224. Ta reſzta ma ieſzcze zamykać kwadrat z 30, to ieſt 900, które 900. od 4224 odiąwſzy, zoſtanie 3324,

Ta reſzta powinna zamykać część pierwiaſtku znalezioną 830, dwa razy wzię-

tą,

tą, i rozmnożoną przez znak iedności pierwiaſtku, i ieſzcze zamykać powinna kwadrat tychże iedności. Podzielmy więc 3824 przez 1660, to ieſt przez 830 dwa razy wzięte, a wieloraz 2. będzie znakiem iedności pierwiaſtku. Przez te 2. rozmnożywſzy 1660, i liczbę rozmnożoną: 3320, odiąwſzy od 3324, zoſtanie 4, która to reſzta ieſt kwadratem z 2 iedności. Cały więc pierwiaſtek kwadratu: 692224, będzie 832.

Wzór działania.

69,22,24.|800
64 00 00

1600.| 5 22 24|30
4 80 00

42 24
9 00

1600|33 24|2
33 29

4
4

0.

Trzeba iako naywięcey takich przykładow Uczniom podawać, nieużywaiąc żadnego ieſzcze ſkrócenia. Na wzór dwa naſtępuiące przykłady podaią ſię.

Przykład I.

46,02,26,56 | 6000.
36 00 00 00 |

:12000 | 10 02 26 56 | 700.
8 40 00 00

1 62 26 56
49 00 00

:13400 | 1 13 26 56 | 80
107 20 00

6 06 56
64 00

:13560 | 5 42 56 | 4
5 42 40

16
16

0.

Przykład II.

13,59,39,69. | 3000
9 00 00 00

6000 | 4 59 39 69 | 600.
3 60 00 00

99 39 69
36 00 00

7200 | 63 39 69 | 80
57 60 00 |

5 79 69
64 00

7360 | 5 15 69 | 7.
5 15 20

49
49

0.

117. *Uwaga.* Jako w dzieleniu zwyczaynym, tak i w wyciąganiu Pierwiastku kwadratowego, można się (kto iefzcze nie ieft wprawnym) łatwo pomylić w znakach wielorazu. Omyłka w dzieleniu łatwa ieft do poprawienia, gdy uważać będziemy, ieżeli liczba dzieląca rozmnożona przez wieloraz odiąć się może od części liczby podzieloney, którą dzielić przypada, albo ieżeli reszta nie ieft większa od

od liczby dzielącey. W wyciąganiu Pierwiastku kwadratowego, (które wychodzi na iedno prawie co i dzielenie, w którymby liczba dzieląca co raz się odmieniała) można także omyłkę iakąkolwiek postrzedz podobną, iak przy zwyczaynym dzieleniu, czyniąc uwagę; wzgląd ieszcze i na to mieć należy, że wyciągaiąc pierwiastek sposobem wyżey podanym, dwa się czynią odeymowania; to iest odeymuie się nayprzod liczba dzieląca przez część przypadaiącą Pierwiastku rozmnożona, i powtóre odeymuie się kwadrat teyże części Pierwiastku; więc, gdyby zdarzyło się, że pierwsze tylko odięcie uczynić można, a drugiego iuż niemożna; ostrzeżeni tym bylibyśmy, żeśmy wzieli wieloraz bardzo wielki, a zatym zmnieyszyć go potrzeba. W ostatnich dwóch przykładach, w pierwszym, 12000, zmieścić się mogło razy 800 w 10022656; a w drugim, 6000, mogło się znaydować 700 razy w 4593969; ale nie możnaby było od reszty odiąć kwadraty tychże wielorazów; i przeto w obydwóch tych przykładach iednością wieloraz zmnieyszyliśmy.

118. *Pierwsze* skrócenie, którego przy wyciąganiu Pierwiastku kwadratowego użyć można, iest w opuszczeniu zerów w liczbie dzielącey, podzielney, i w wielorazie,

razie, zachowuiąc iednak cyfrom pozoſtałym te mieyſca, któreby zaſtępować powinny, gdyby zera odcięte niebyły.

119. *Powtore.* Ponieważ oſtatnie po prawey ręce znaki kwadratu podanego do wyciągania Pierwiaſtku, całe ſię nieodmieniaią. Po pierwſzych odeymowaniach; nie ſą więc do nich potrzebne; a zatym do każdego wſzczegulności odeymowania, można te tylko cyfry ſpuſzczać z kwadratu, od których odeymować przypada liczbę dzielącą przez wieloraz rozmnożoną; zachowuiąc im mieyſce i znaczenie to ſamo, które miały w całym kwadracie.

120. *Potrzecie.* Zamiaſt dwóch odeymowań, nayprzod liczby dzielącey przez wieloraz rozmnożoney, potym kwadratu tegoż wielorazu, można obadwa razem czynić odeymowania: kładąc znak znaleziony na wieloraz, nie tylko na zwyczaynym ſwoim mieyſcu, ale też przy końcu liczby dzielącey, i dopiero tak powiększoną liczbę dzielącą mnożyć przez ten znak wielorazu, a rozmnożoną od liczb przypadaiących z kwadratu, odeymować.

Tu na tych ſamych liczbach kwadratowych, z których iuż uczniowie wyciągali pierwiaſtek, niechay użyią tych trzech

ſpoſo-

sposobów skrócenia; bo im już i działanie będzie łatwieysze, i lepiey dokładność tego sposobu skróconego obaczą, porownywaiąc działanie pierwsze z drugim.

121. Wyciągniymy tym skróconym sposobem pierwiastek kwadratowy z liczby 13593969.

Nayprzód odzielić trzeba kreskami co dwie liczby, iak wyżey; oddzieliwszy tak liczby kwadratu podanego 13,59,39,69, widziemy, że ten kwadrat cztery znaki liczebne mieć będzie w swoim Pierwiastku. Kwadrat naybliższy w pierwszym po prawey ręce oddziale zawarty, będzie 9, którego Pierwiastek, 3. znaczący tysiące. Odiąwszy ten kwadrat 9. od 13. zostanie 4, do których przypisawszy oddział następuiący: 59, będzie 459. Podwoymy pierwszy znak Pierwiastku 3, i będzie 6. Te 6. w pierwszych dwóch znakach 45, liczby 459, znalazłoby się razy 7, ale maiąc wzgląd, że kwadrat tego wielorazu niemógłby się potym odiąć, położmy tylko 6, na mieyscu wielorazu, i przypiszmy ie także do 6. liczby dzielącey. Rozmnożywszy 66, przez 6, i liczbę rozmnożoną 396, odiąwszy od 459, zostanie 63, do którey reszty przypiśźmy oddział kwadratu następuiący 39; i dzielmy daley 6339,

przez

przez dwa znaki Pierwiaſtku znalezione, 36, podwoiwſzy ie; to ieſt przez 72. 72 w 633 znayduie ſię razy 8. Napiſżmy 8. na wieloraz, i przypiſżmy ie do liczby dzielącey 72. Rozmnożywſzy 728, przez 8, będzie 5824, które odiąwſzy od: 6339. zoſtanie 515. Dopiſżmy do tey reſzty, oſtatni kwadratu oddział 69; i 51569. dzieſmy przez podwóyną liczbę znakow Pierwiaſtku iuż znalezionych 368; to ieſt przez 736. 736 w 5156 znaydziemy razy 7. Przypiſżmy te 7. do 368, i do 736. Rozmnożywſzy 7367. przez 7. i liczbę rozmnożoną 51569 odiąwſzy od 51569 nic nie zoſtanie; a zatym kwadratu podanego pierwiaſtek będzie: 3687.

Wzór działania.

13,59,39,69|3687.
9
66|4 5,9
3 9 6
728|6 3 3,9
5 8 2 4
7367.|5 1 5 6,9
5 1 5 6 9
0.

122. *Wnioſek.* Ponieważ wynieſienie iakiey liczby do kwadratu ieſt to iedno, co rozmnożenie tey liczby przez ſiebie ſamę, czyli rozmnożenie dwoch liczb równych iedney przez drugi kwadrat więc ułomku iakiego, będzie ułomek, którego licznik, ieſt kwadratem licznika tamtego, a mianownik kwadratem mianownika iego. Y tak kwadrat z $\frac{1}{2}$, ieſt $\frac{1}{4}$, kwadrat z $\frac{1}{3}$, ieſt $\frac{1}{9}$. kwadrat z $\frac{2}{3}$, ieſt $\frac{4}{9}$; kwadraty ułomkow $\frac{1}{4}$. $\frac{3}{4}$, ſą $\frac{1}{16}$, $\frac{9}{16}$. y. t. d.

Chcąc tedy wyciągnąć pierwiaſtek kwadratowy z ułomka podanego, trzeba oſobno wyciągnąć go, z licznika i z mianownika. Y tak Pierwiaſtki kwadratowe tych ułomkow; $\frac{9}{16}$, $\frac{16}{25}$, $\frac{25}{36}$ i t.d. ſą $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{5}{6}$. i t.d.

123. *Uwaga.* Gdy ſię trafi wyciągać Pierwiaſtek kwadratowy z liczby mieſzaney, to ieſt złożoney z liczby całkowitey, i z ułomka; trzeba ią pierwey obrócić na ſam ułomek. Tak naprzykład chcąc wyciągnąć pierwiaſtek z 2. $\frac{1}{4}$, liczba ta będzie iedno co ułomek $\frac{9}{4}$, którego pier-

wiaſtek

wiaſtek $\frac{3}{2}$, czyli $1\frac{1}{2}$. Liczba też: $2\frac{7}{9}$, ieſt iedno co $\frac{25}{9}$, a zatym pierwiaſtek iey $\frac{5}{3}$, czyli: $1\frac{2}{3}$. Liczba $10\frac{6}{25}$, tyle znaczy co $\frac{256}{25}$, więc pierwiaſtek iey: $\frac{16}{5}$, czyli $3\frac{1}{5}$.

O Ilościach nieſpołmiernych, i przybliżeniu Pierwiaſtków tych liczb, które nie ſą kwadratami.

124. *Uwagi. 1.* Niech będzie liczba 2, z którey przypada wyciągać Pierwiaſtek kwadratowy. Pierwiaſtkiem tey liczby nie będzie ani 1, ani 2; bo kwadrat z 1, ieſt 1; mniey od 2, a kwadrat z 2, ieſt 4. więcey od 2. Więc Pierwiaſtek z 2, będzie między 1. i 2, a zatym będzie złożonym z iedności, i z ułomka; to ieſt: będzie liczbą mieſzaną, którą na ſam ułomek obrócić można.

125. Aby ułomek ten był prawdziwym Pierwiaſtkiem z 2, trzebaby, aby kwadrat iego równał ſię 2; a zatym aby kwadrat licznika iego był dwa razy większy od kwadratu mianownika. Znaleśćby tedy potrzeba taki kwadrat, któryby dwa razy w ſobie zamykał inny kwadrat; aże to ieſt niepodobna, zaraz ſię pokaże.

Każda

Każda liczba kończyć się musi na ieden z tych dziesięciu znakow: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Każdy zaś kwadrat inaczey kończyć się niemoże, tylko na te znaki, na które kończą się kwadraty dziesięciu znakow dopiero wyrażonych, to iest na:

1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0.

czyli krócey, na 1, 4, 9, 6, 5, 0.

Kwadraty podwoione niemogą się inaczey kończyć, tylko tak, jak się kończą liczby kwadratow ostatnie, podwoione; to iest, na: 2,8,8,2,0,0; czyli krócey na: 2,8,0. A że pierwsze zakończenia na: 2,8, nie są zakończeniami kwadratów; więc kwadraty podwoione, liczb zakończonych na: 1,2,3,4,5,6,7,8,9, niemogą bydź kwadratami. Jeżeli liczba zakończona iest na iedno zero, to iest ieżeli ieden lub więcey dziesiątków w sobie zupełnie zamyka, kwadrat iey zamykać będzie takąż liczbę stów, a zatym kończyć się będzie na dwa zera. Kwadrat zaś liczby kończącey się na 5, kończy się na 25. a podwoiony, kończyć się będzie na iedno tylko zero, bo będzie kończył się na 50; więc tak podwoiony nie będzie kwadratem.

Nako-

Nakoniec ieżeli liczba kończy ſię na iedno zero, 10 razy zamykać w ſobie będzie liczbę zakończoną na ieden z dziewięciu pierwſzych znakow: 1,2,3,4,5,6,7,8,9; a kwadrat iey, 100 razy zamykać będzie liczbę zakończoną na: 1,4,5,6,9, kwadrat zaś ten dwa razy wzięty, zamykać będzie 100. razy liczbę zakończoną na: 2, 8,0, a pierwiaſtek kwadratu tego dwa razy wziętego, zamykać będzie 10. razy pierwiaſtek liczby zekończoney na ieden z tych trzech znakow: 2,8,0; który to oſtatni pierwiaſtek wyciągniony bydź niemoże, iakośmy iuż okazali. Tego ſamego rozumowania użyć można, gdy liczba kończyć ſię będzie na dwa, trzy, cztery i t. d. zera.

Więc w ſzczegulności mówiąc, Pierwiaſtek kwadratowy z liczby 2, wyciągniony bydź niemoże.

126. To Dowodzenie ſtoſowane bydź może do wſzyſtkich liczb na 2. zakończonych. Y tak nie można wyciągnąć Pierwiaſtku kwadratowego z liczb: 12, 22, 32, 42, 52, 62, i t. d: czyli to w liczbach całkowitych, czyli w ułomkach, czyli w liczbach mieſzanych.

127. Podobnie dowieść można, że niepobo-

podobna znaleść pierwiaſtek kwadratowy liczby 3, ani żadney inney na 3. kończącey ſię. Tym co wyżey ſpoſobem dowodzi ſię niepodobność wyciągnienia Pierwiaſtku kwadratowego z liczb kończących ſię na 5, 7, i t. d; a z tąd możnaby ułożyć Tablicę bardzo obſzerną liczb takich, ktorych Pierwiaſtki kwadratowe w liczbach ani całkowitych, ani łamanych, zupełnie wyciągnione bydź niemogą.

128. Możnaby iednak i ogulnie dowieść, że wſzyſtkie liczby całkowite, które nie maią Pierwiaſtku kwadratowego w liczbach całkowitych, mieć go też nie będą i w liczbach łamanych. Kładzie ſię tu treść tylko tego dowodu:

Jeżeli dwie liczby ſą *pierwſzemi* iedna względem drugiey, (obacz w Arytmetyce na karcie 192.) ich kwadraty pierwſzemi też będą ieden względem drugiego; ponieważ dzielniki kwadratów pochodzą z dzielników ich Pierwiaſtków.

Y tak, że liczby 2, y 3, ſą między ſobą *pierwſzemi*; pierwſzemi ſą także między ſobą i ich kwadraty: 4, i 9; że liczby 3. i 5. ſą między ſobą pierwſzemi, podobnież pierwſzemi będą i ich kwadraty: 9. 25. Więc ieżeli dwie iakiekolwiek liczby ſą

pierwſze-

pierwszemi między sobą, ich kwadraty niebędą wielokrotne, ieden drugiego; to iest: ieden kwadrat niebędzie zupełnie w sobie zamykał drugiego.

Niech będzie liczba iaka całkowita, któ-rey nie można mieć Pierwiastku kwadra-towego w liczbach całkowitych. Gdyby ten Pierwiastek można zupełnie okazać w liczbie mieszaney, ta liczba mieszana, dałaby się obrócić na sam ułomek, a ułomek ten możnaby przywieść do nayprościey-szych wyrazow. Ale aby tenże ułomek wy-rażał zupełny Pierwiastek, trzebaby, aby iego kwadrat był liczbą całkowitą, a za-tym, aby licznik tego ułomka kilka razy zupełnie większy był od dzielnika iego, co iest nie podobna; więc gdy liczbie ia-kiey całkowitey, nie można zupełnie zna-leść pierwiastku kwadratowego w liczbie całkowitey, nie można go też znaleść a-ni w ułomku.

129. Są więc takie niektóre Ilości (*Quantitates*) które w liczbach dokładnie bydź wyrażone nie mogą; ani nawet wy-razić można, iak się maią do iedności. Ta-kie są te Ilości, które przez siebie same rozmnożone, czyniłyby: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, i t. d. Te ilości nazywaią się *niespołmier-nemi* (Incommensurabiles, albo Irrationa-les) Piszą się następuiącym sposobem.

Va,

$V2$, $V3$, $V5$, $V6$, $V7$, $V8$, $V10$. i t. d. Znak ten V, czyta się *Pierwiaſtek* (Radix) naprzykład: $V2$, Pierwiaſtek dwóch, $V3$. Pierwiaſtek trzech i t. d.

130. Gdy mowię, że tych Ilości wyrazić dokładnie nie można, przydaię zaraz, że ich dokładnie wyrazić niemożna w liczbach; bo w inny ſpoſob można ie dokładnie wyrazić. Naprzykład: można zawſze naznaczyć dwie liniie, któreby ſię miały między ſobą, iak 1, do Pierwiaſtku kwadratowego liczby podaney. Y tak Przekątna kwadratu, ma ſię do boku iednego, iak ſię ma Pierwiaſtek kwadratowy z 2, do 1, albo iak $V2$: 1. Wyſokość także Troykąta równobocznego, tak ſię ma do połowy Podſtawy, iak $V3$: 1. i t. d.

131. Lobo w liczbach niemożna dokładnie wyrazić Ilości nieſpołmiernych; można iednak ich wartość przybliżyć do prawdziwey, i uchybienie zmnieyſzyć tyle, ile zechcemy. Spoſób do tego nayſnadnieyſzy ieſt przez użycie znaków *Dzieſiątnych* do wyrażenia takich Ilości.

Niech będzie podana liczba 2, aby wyciągnąć z niey Pierwiaſtek kwadratow i przez *przybliżenie* (per approximationem.)

Gdyby

Gdyby liczba podana była razy 100, 10000, 1000000, i t. d. większa iey pierwiastek byłby też większy razy 10, 100, 1000 i t. d. tak dalece, że wyciągnąwszy pierwiastek z liczb 200, 20000, 2000000. i t. d. trzebaby pierwiastek ten dzielić przez 10, 100, 1000, y t. d. aby w nim uniknąć omyłki w częściach dziesiątych, setnych, tysiącznych i t. d. Przeto Pierwiastek kwadratowy, wyciągniony z 2, aż do cząstek tysiącznych, znaydzie się wyciągaiąc go z liczby: 2000000.

Pierwiastek naybliższy z liczby 2000000 wyciągniony iest: 1414. a pierwiastek z liczby 2, przybliżony aż do $\frac{1}{1000}$. iest, 1, 414. Ponieważ kwadrat z 1, 414. iest 1,999396, i rożni się od 2, tylko 0,000604.

Wzór działania.

2,00,00,00 | 1,414
1
24 | 10,0
96
281. | 40,0
281
2824 | 11 90,0
11 296.
604.

Gdyby-

Gdybyśmy chcieli ieszcze bardziey przybliżyć do prawdziwego, ten Pierwiastek, naprzykład żeby ani w cząstce $\frac{1}{10000}$, nie było uchybienia, trzebaby ieszcze dwa zera przydać, aby mieć iednym znakiem więcey w pierwiastku.

132. Dla sprawdzenia, czyliśmy wcząstce $\frac{1}{1000}$ nieuchybili, można położyć zamiast pierwiastku znalezionego 1,414; liczbę: 1,415, a ta przez siebie rozmnożona uczyni kwadrat: 2,002225, większy od 2.

133. Częstokroć bardzo wygodnie i prędko wyciągnąć można z liczby pierwiastek przybliżony, w ułomkach zwyczaynych. Sposob ten zasadza się na tym, że ieżeli liczba iest złożona z dwóch części, z których iedna iest bardzo wielka względem drugiey; kwadrat tey liczby będzie prawie złożony z kwadratu części większey, i z podwoionego rozmnożenia części pierwszey przez drugą; ponieważ kwadrat części mnieyszey, iako bardzo mały, może bydź zaniedbany. Y tak kwadrat liczby naprzykład 11, podzieloney na dwie części: 10, i 1. będzie równy 100, to iest kwadratowi z 10, przy-

dawszy 10. przez 2 rozmnożone, to iest, 20, i kwadrat części mnieyszey: 1; A choćby ten ostatni kwadrat i opuścić, tedy iednak Summa 120, małoby się rożniła od kwadratu prawdziwego 121.

134. Idzie z tąd, że maiąc liczbę, z którey przypada wyciągać Pierwiastek złożony z dwóch części, z których iedna byłaby wielka, a druga mała, ieżeli wiemy iuż tę część wielką, znaydziemy z niewielkim uchybieniem i część małą, podzieliwszy różnicę między liczbą podaną, i kwadratem części wielkiey, przez tę samę część wielką dwa razy wziętą. To, co na wieloraz wypadnie, trzeba przydać do wielkiey części, gdy liczba podana będzie większa od kwadratu części wielkiey; albo odiąć od części wielkiey, gdy kwadrat iey większy będzie od liczby podaney.

Niech będzie podana do wyciągnienia Pierwiastku, liczba 5. Pierwiastek iey naybliższy w liczbie całkowitey, iest 2. którego kwadrat 4. Różnica między tym kwadratem i 5, iest: 1. Podzielmy tę różnicę 1. przez 2, dwa razy wzięte, to iest przez 4, i będzie $\frac{1}{4}$. A zatym Pierwiastek liczby 5. nie wiele uchybiony, bę-

dzie

dzie 2, $\frac{1}{4}$ albo $\frac{9}{4}$. Kwadrat z $\frac{9}{4}$ iest $\frac{81}{16}$, czyli $5\frac{1}{16}$. Podzielmy $\frac{1}{16}$ przez $\frac{9}{4}$ dwa razy wzięte, to iest przez $\frac{9}{2}$ wypadnie na wieloraz $\frac{1}{72}$ który odiąwszy od $\frac{9}{4}$ czyli od 2, $\frac{1}{4}$ zostanie $2\frac{17}{72}$ albo $\frac{161}{72}$, y ten będzie ieszcze bardziey przybliżaiący się do prawdziwego pierwiastek kwadratowy liczby 5. Jakoż kwadrat z $\frac{161}{72}$ iest: $\frac{25921}{5184}$, czyli $5\frac{1}{5184}$.

135. Chcąc porównać to przybliżenie z tym, któreśmy mieli w ułomkach dziesiątnych; obróćmy ułomek zwyczayny $\frac{161}{72}$ na ułomek dziesiątny, a znaydziemy: 2,2361. i t. d. Pierwiastek zaś liczby 5, w ułomku dziesiątnym byłby 2,2360. i t. d. A zatym różnica liczb w tym dwoiakim postępowaniu, wydałaby się dopiero w częściach dziesięć tysiącznych.

136. W pierwszym postępowaniu, kładzie się zamiast liczby podaney, ułomek ze wszystkim iey równy, którego dziel-

nik iest kwadratem z 10, z 100, z 1000. i t. d. Naprzykład zamiast 2, pisze się $\frac{200.}{100,}$ $\frac{20000.}{10000,}$ $\frac{2000000.}{1000000.}$ W drugim postępowaniu, szukamy ułomka bardzo blisko równego liczbie podaney. Którego tak licznik, iako i mianownik, byłby zupełnym kwadratem. Y tak liczba 2, iest prawie równa ułomkom: $\frac{9}{4,}$ $\frac{49}{25.}$ $\frac{100}{49,}$ $\frac{289}{144.}$ i t. d. Liczba 3, iest prawie równa ułomkom: $\frac{49}{16,}$ $\frac{361.}{121.}$ i t. d. Znayduiemy zaś te ułomki, dwoiąc, troiąc i t. d. kwadraty liczb naturalnych: 2, 3, 4, 5, i t. d. i uważaiąc, ieżeli między liczbami kwadratowemi nie będzie która tuż zbliżaiąca się do liczby podwoiney potroioney, i t. d. którąśmy iuż znaleźli. Naprzykład: 2 razy 4. czyni 8, a blisko czyni kwadrat 9, więc 2, zupełnie rowna się $\frac{8}{4,}$ a niedaleko iest od $\frac{9}{4,}$ a zatym Pierwiastek z 2, będzie blisko $\frac{3}{2,}$ Podobnie 2 razy 25, czyni 50, więc 2, rowna się $\frac{50}{25,}$ a nie daleko iest od $\frac{49}{25}$; a zatym Pierwiastek z 2, będzie blisko: $\frac{7}{5.}$ Można potym poprawić, gdy zechcemy pierwsze te przybliżenia, postępuiąc sobie tak, iak się wyżey powiedziało.

Do-

Dosyć będzie tym czasem natey początkowey wiadomości względem przybliżania Pierwiastków nie społmiernych. Rzecz ta stała się materyą wielkiey wagi, gdy sławni Matematycy Euler i de la Grange, głębiey ią brać poczęli, i rozmaite iey przystosowania czynić. (m)

137. Niech będzie ułomek $\frac{2}{3}$, z którego trzeba wyciągać Pierwiastek kwadratowy. Zamiast, cobyśmy mieli osobno ten Pierwiastek wyciągać z 2, i z 3, i dzielić potym Pierwiastek Licznika przez pierwiastek mianownika, wygodniey będzie, ułomek ten $\frac{2}{3}$, odmienić na inny, gdzieby mianownik, był zupełnym kwadratem. Ułomek tedy tak odmieniony będzie $\frac{6}{9}$. Wyciągniymy pierwiastek z licznika 6, a trzecia część tego Pierwiastku, będzie pierwiastkiem ułomka $\frac{2}{3}$. $\sqrt{6} = 2,4494$; trzecia tego pierwiastku część iest prawie 0,8165. Jakoż kwadrat z 0,8165, będzie: 0,66667225; i nie wiele różni się od $\frac{2}{3} =$ 0,66666666. i t. d.

138

(m) *Obacz między innemi Dzieło pod Tytułem: Introductio ad analyfim Infinitorum przez Eulera; i przydatki de la Grange do Algebry Eulera po Francuzku wydane.*

138. Możnaby też wyciągnąć pierwiaſtek z $\frac{2}{3}$, przez ułomki zwyczayne. Kwadrat naybliższy ułomka $\frac{2}{3}$, ieſt 1. który różni ſię od $\frac{2}{3}$ przez $\frac{1}{3}$. Dzielmy, przez kwadrat 1. podwoiony to ieſt przez 2, tę różnicę $\frac{1}{3}$, i będzie $\frac{1}{6}$. a odiąwſzy $\frac{1}{6}$, od 1. albo od $\frac{6}{6}$, zoſtanie $\frac{5}{6}$. kwadrat z $\frac{5}{6}$, ieſt $\frac{25}{36}$, który od $\frac{24}{36}$ różni ſię przez $\frac{1}{36}$. Tę różnicę $\frac{1}{36}$. podzieloną przez dwa razy $\frac{5}{6}$. czyli przez $\frac{5}{3}$. to ieſt $\frac{1}{60}$, odeymuię od $\frac{5}{6}$, zoſtanie $\frac{49}{60}$. Y ten ułomek $\frac{49}{60}$, będzie pierwiaſtkiem bardzo bliſkim z $\frac{2}{3}$, ponieważ kwadrat z $\frac{49}{60}$. ieſt. $\frac{2401}{3600}$, a ułomek: $\frac{2}{3}$, znaczy tyle, co $\frac{2400}{3600}$; rożnica więc będzie tylko w $\frac{1}{3600}$.

139. W ogulności mowiąc; aby Pierwiaſtek kwadratowy wyciągnąć z ułomka iakiego; trzeba pierwey tak zrobić, aby mianownik iego był kwadratem, mnożąc, gdy inaczey być nie może licznika i mianownika przez mianownika, i wyciągać potym pierwiaſtek z licznika tak rozmnożonego,

żonego, a przez mianownika nie rozmnożonego podzielić ten pierwiaſtek.

140. Może ſię iednak obeyść czaſem bez mnożenia tak licznika, jako i mianownika, przez tegoż ſamego mianownika; gdy mianownik iuż ieſt kwadratem, albo gdy takim można go uczynić, mnożąc przez mnieyſzą iaką od mianownika liczbę, tak licznika, iako i mianownika. Naprzykład chcąc wyciągnąć pierwiaſtek z $\frac{3}{4}$; wyciągniemy go z 3. i podzielemy przez 2; chcąc mieć pierwiaſtek z $\frac{5}{12}$, rozmnożemy 5, i 12, przez 3, a maiąc ztąd $\frac{15}{36}$; wyciągniemy pierwiaſtek z 15, i podzielemy przez 6. pierwiaſtek z 15, będzie prawie 4, odtrąciwſzy $\frac{1}{8}$, to ieſt będzie $\frac{31}{8}$. więc pierwiaſtek z $\frac{5}{12}$, będzie: $\frac{31}{48}$; kwadrat albowiem z $\frac{31}{48}$. ieſt: $\frac{961}{2304}$. a $\frac{5}{12}$. tyle znaczy co $\frac{960}{2304}$: a zatym uchybienie ieſt tylko w $\frac{1}{2304}$.

RO-

ROZDZIAŁ VI.

O dodawaniu i odeymowaniu Kwadratow, i zamienianiu ich na iakiekolwiek Figury proſtokreślne.

141. *Defin:* W tróykącie proſtokątnym, bok przeciwny proſtemu kątowi, nazywać będziemy: Linią *Przeciwproſtokątną* albo iednym ſłowem: *Przeciwproſtokątną* (Hypothenuſa.)

142. *Twierdz:* 1. Kwadrat zrobiony na przeciwproſtokątney Troykąta proſtokątnego, równą ſię ſummie kwadratów z, dwóch innych boków tegoż troykąta.

Prawdę Twierdzenia tego okazać nayprzod potrzeba na Tróykącie Proſtokątnym równo ramiennym, to ieſt maiącym dwa boki równe; dowodząc: że kwadrat zrobiony na Przekątney kwadratu dwa razy ieſt od tegoż kwadratu większy.

Tab. VIII. Fig. 2. Niech będzie: ABCD, kwadrat, którego Przekątna AC. Przeciągniymy AB, do E, a CB, do F, tak, aby BE. i BF, równe były AB. Poprowadźmy Linie: AF, CE, EF, Czworokąt ACEF, będzie kwadratem przekątney AC, i będzie dwa razy większy od kwadratu ABCD.

Jakoż

Jakoż cztery Troykąty: ABC, ABF, EBC, EBF, mogą Przyſtać do ſiebie; bo maią wſzyſtkie kąty przy B. proſte, i boki przy nich równe; a zatym linie AC, CE, EF, AF, będą wſzyſtkie równe. Każdy oprocz tego kąt w czworokącie ACEF, ieſt proſty, bo złożony z dwóch kątów poł proſtych, iak naprzykład kąt ACE, złożony ieſt z kątów półproſtych BCA, BCE; więc Czworokąt ACEF ieſt proſtokątem maiącym boki wſzyſtkie równe, a przeto ieſt kwadratem. Ten kwadrat ACEF, ſkłada ſię z czterech Troykątów, z których każdy przyſtać może do iednego z dwóch Troykątów kwadratu ABCD. Ze tedy takich Troykątów ieſt cztery w kwadracie ACEF, iakich ieſt dwa w kwadracie ABCD; kwadrat więc Przykątney AC, ieſt dwa razy większy od kwadratu tego, którego bokiem ieſt ta Przekątna.

143. *Wnioſek:* Aby dodać dwa kwadraty równe, trzeba zrobić Tróykąt proſtokątny równoramienny, którego boki przy kącie proſtym byłyby równe, bokowi iednego z dwoch kwadratów, a Przeciwproſtkątna tego Troykąta, będzie bokiem kwadratu równego ſummie dwóch tamtych kwadratów.

Można ieſzcze, nim ſię do ogulnego dowodzenia przyſtąpi, przytoczyć nie-

które

które przypadki szczególne, gdzie trzy boki Troykąta prostokątnego będą w liczbach wyrażone. Obacz na Figurze 3. gdzie trzy boki Troykąta prostokątnego, wyrażone przez liczby: 5, 4, 3, w częściach równych, naprzykład w calach; kwadraty tych liczb są „ 25, 16, 9, calów kwadratowych; i pierwszy kwadrat równa się summie dwóch ostatnich.

Fig. 3.

INNE PRZYKŁADY.

Przeciwprostkątne	*Boki.*
13. - - -	12 - 5
17. - - -	15 - 8
25. - - -	24 - 7.

Dowodzenie ogulne, które teraz damy, można obiaśnić na kwadratach z karty grubey wyrzniętych.

Fig. 4. Niech będą dwa iakiekolwiek kwadraty: ABCD. i AEFG; znaydziemy kwadrat równy ich summie w ten sposób. Postawmy nayprzod te kwadraty, ieden przy drugim tak, aby dwa ich boki AD. i AG, stykały się, i iednę linią czyniły DG. Bok AG mnieyszego kwadratu, przeniemsy potym na bok AD. większego kwadratu od D, do J. Poprowadźmy linie IF, IC. Tróykąty prostokątne IGF, CID. maią boki przyległe kątowi

kątowi prostemu równe bokom kwadratów obydwóch. Trzeba więc dowieść, że kwadrat przeciw prostokątney IF, albo IC. równy iest summie kwadratów z GI. i GF, albo z DC. i DI. Wyrżnąwszy kartę wzdłuż Linii IF. i IC, przyłóżmy, Troykąta IDC, Bok DC, na iego równym boku BC. bok DI. przypadnie na BH. przedłużeniu boku AB; a to z tey przyczyny, że obadwa są kąty proste D. i B; bok zatym trzeci IC. weźmie położenie HC; będzie więc Tróykąt CBH, równy Troykątowi CDI. Podobnie i drugiego Troykąta IGF, bok IG, przystanie zupełnie do boku HE, sobie równego, ponieważ IG. równa się AD. AD, równa się AB, a AB. równa się HE; bok GF. przypadnie na równy sobie bok EF: a IF, weźmie położenie HF, będzie więc Troykąt FEH, równy Tróykątowi FGI. Czworokąt, który się zrobi z czterech przeciwprostokątnych: CI, IF, FH. HC, będzie miał wszystkie kąty proste, bo kąt na przykład IFH, równa się summie kątów IFE, i EFH, które równie czynią kąt prosty, iak czyniły kąty IFE i IFG. Ten więc czworokąt iest razem i prostokątem maiącym wszystkie boki równe, a zatym iest kwadratem; który to kwadrat rowna się summie dwóch kwadratów podanych, a zrobiony iest na Przekątney Troykąta prostokątnego, maiącego za boki przyległe kątowi proste-

mu

mu te ſame, które były bokami tychże kwadratów.

Dowodzenie naſtępuiące powinno tym iaśniey być wyłożone, im prościey ieſzcze od pierwſzego tę prawdę okazuie, i więcey daie do czynienia dowcipowi. Wiele także użytecznych wnioſków z niego wypływa.

Tab. IX. Fig. 1. Niech będzie Troykąt ABC. proſtokątny przy C. Na trzech bokach iego: AB, AC, BC, wyſtawmy trzy kwadraty: ABDE, ACFG, BCHI. Kwadrat ABDE. równy będzie ſummie dwóch innych: ACGF. i BCHI.

Z wierzchołku kąta proſtego ſpuśćmy na przeciw proſtokątną AB; proſtopadłą CL, i przeciągniymy ią aż do boku ED, do M.

Pokazać teraz trzeba, że kwadrat BCHI równy ieſt Proſtokątowi BDML, a kwadrat ACFG, Proſtokątowi AEML, a zatym obadwa razem kwadraty równe kwadratowi ABDE.

Pociągniymy linią CD; Troykąt BDC. będzie połową Równoległoboku proſtokątnego BDML; bo obadwa maią ſpolną

pod-

podſtawę BD, i na teyże ſamey równoodległey MC, ſą zakończone. (94.)

Pociągniymy linią AI; Tróykąt BIA, będzie połową kwadratu BCHI, dla teyże, co wyżey przyczyny; bo obadwa także maią podſtawę ſpolną BI, i obadwa na iedney równoodległey AH. ſą zakończone.

Jeżeli tedy dowiedziemy, że Troykąty: ABI. CBD. ſą równe; iuż tym ſamym Proſtokąt EDML, równy będzie kwadratowi BCHI; bo kiedy połowy dwóch rzeczy ſą równe, to i dwie te rzeczy będą równe.

Te dwa Troykąty mogą przyſtać do ſiebie; ponieważ bok AB. w iednym, równy ieſt bokowi BD, w drugim, bo obadwa te boki do iednego kwadratu należą; bok BI. w iednym, równy także ieſt bokowi BC, w drugim; kąty między temi bokami zawarte: ABI, CBD, ſkładaią ſię obadwa z kąta proſtego i z kąta ABC; więc te dwa Tróykąty ſą równe w powierzchniach; a zatym i kwadrat BCHI, równy będzie Proſtokątowi BDML. Tymże ſamym ſpoſobem dowodzi ſię, że kwadrat ACFG. równy ieſt Proſtokątowi AEML; to ieſt pociągnąwſzy linie CE, BG, Tróykąty BAG, EAC. mogą przyſtać do ſiebie, a zatym będą równe; kwadrat

więc

więc ACFG, że iest dwa razy większy od Troykąta BAG, będzie równy Prostokątowi AEML, dwa razy także większemu od Troykąta EAC. (n)

144. *Wniosek.* Gdy od wierzchołka kąta prostego, w Troykącie prostokątnym spuszczona będzie Prostopadła na przeciw prostkątną, kwadrat z boku iednego tego Troykąta równy będzie Prostokątowi zrobionemu z przeciwprostkątney, i z odcinka uczynionego przez Prostopadłą, a przy

(n) *Sposób postępowania w tym dowodzeniu, może służyć za wzór do innych dowodzeń przydłuższych i z wielu złożonych. Podzieliliśmy go na części, z każdą osobnośmy się obeszli. W tych samych częściach były znowu uczynione nowe podziały, nie zawisłe iedne od drugich, i każdy podział w szczególności dowodzony. Linie nie były razem prowadzone, ale wtedy dopiero, gdy były potrzebne. Ta ostatnia uwaga powinna być między innemi na pamięci w dowodzeniu Twierdzeń złożonych, gdzie gdyby wiele razem liniy prowadziło się na Figurze, nie małą trudność zadałoby to Uczniom niedobrze ieszcze w takowe działania wprawionym.*

przyległego temuż Troykąta bokowi, którego kwadrat bierze się. Tak naprzykład kwadrat boku AC, to iest ACFG, równy iest Prostokątowi z Przeciwprostkątney AB, albo AE. i z odcinku AL; to iest Prostokątowi AEML, iako się wyżey pokazało. Podobnie i kwadrat drugiego boku BC, to iest BCHI, równy iest Prostokątowi z Przeciwprostkątney AB, albo BD, i z odcinka BL, to iest Prostokątowi BDML.

145 *Zagadn:* 1. Maiąc dane dwa kwadraty, zrobić kwadrat równy ich summie, albo ich różnicy.

1. Zrobmy kąt prosty, którego ramionami byłyby boki dwóch kwadratów danych. Pociągnąwszy przeciwprostkątną, ta będzie bokiem kwadratu równego summie tamtych dwóch kwadratów.

2. Zróbmy kąt prosty, dawszy mu za iedno ramię bok mnieyszego kwadratu. Od końca tego ramienia, promieniem równym bokowi większego kwadratu, nakreślmy łuk koła, któryby przecinał ramię drugie kąta prostego, to przecięcie naznaczy długość tego drugiego ramienia, z którego wyprowadziwszy kwadrat; ten będzie równy różnicy dwóch kwadratów danych.

Gdyby

Gdyby kwadraty dane były równe; rozwiązanie byłoby ieszcze łatwieysze.

Przysłosowanie zagadnienia, poprzedzaiącego, do wynalezienia innych Kwadratów.

146. Jużeśmy pokazali, że kwadrat Przekątney iest dwa razy większy od kwadratu, którego iest ta Przekątna. Aby zrobić kwadrat równy summie trzech kwadratów równych, czyli aby potroić iaki kwadrat: znalazłszy nayprzod kwadrat podwoyny, możnaby mu przydać znowu kwadrat poiedynczy, ale też można i ieszcze lepiey tak sobie postąpić: Kwadrat potróyny iest różnicą kwadratu poczwornego, od kwadratu poiedyńczego. Zróbmyż więc Troykąt prostokątny, którego bokiem iednym byłby bok kwadratu danego, a Przeciwprostkątną daymy mu dwa razy większą od tego boku; bok drugi, który przypadnie w tymże Tróykącie będzie taki, iakiego nam potrzeba, abyśmy mieli kwadrat potroyny.

147. *Uwaga.* Troykąt Prostokątny, którego Przeciw prostkątna iest dwa razy tak wielka, iak iest wielkie ramię iedno kąta prostego; ten, mowię, Troykąt dwa razy iest mnieyszy od Troykąta równo-

boczne-

bocznego, którego połową podstawy byłoby ramie iedno kąta prostego, a drugie byłoby wysokością iego; a zatym, aby potroić iaki kwadrat, dosyć iest na podstawie dwa razy większey od boku tego kwadratu zrobić Troykąt Równoboczny, a wysokość tego Troykąta okaże wielkość boku, na którym wystawić mamy kwadrat potróyny.

148. Aby zrobić cztery razy większy kwadrat od tego, który iest dany; trzeba tylko kwadratu danego bok podwoić.

149. Aby zrobić kwadrat pięć razy większy od podanego, trzeba przy kącie prostym postawić dwa ramiona; iedno równe bokowi kwadratu danego, drugie dwa razy tak wielkie, a przeciwprostkątna będzie bokiem kwadratu pięć razy większego.

150. Aby zrobić kwadrat sześć razy większy od podanego, trzeba albo dodać do siebie kwadrat poczworny i podwoyny; albo też kwadrat podwóyny potroić, poprowadziwszy w danym kwadracie Przekątną, i tę podwoioną, wziąwszy za bok Troykąta równobocznego, którego wysokość oznaczy bok kwadratu sześć razy większego.

151. Aby zrobić kwadrat ſiedm razy większy od danego, trzeba dodać kwadrat poczworny i potróyny, dawſzy kąt proſty między bokami tych dwóch kwadratów; a na przeciwproſtkątney kwadrat poſtawiwſzy; ten będzie ſiedm razy większy od danego.

152. Aby zrobić kwadrat ośm razy większy od podanego, trzeba go albo podwoić, i podwoiony cztery razy pomnożyć, dawſzy mu bok dwa razy większy od boku kwadratu podwoionego; albo też zrobić kwadrat równy Rożnicy między kwadratem danym, i kwadratem dziewięć razy większym od niego; poſtawiwſzy na ten koniec Troykąt proſtokątny, któremu za ramie iedno przy kącie proſtym damy bok kwadratu podanego, a za przeciwproſtkątną, linią trzy razy od tego boku większą. Ramie drugie, które przypadnie w tym Tróykącie, oznaczy bok kwadratu ośm razy większego od danego.

153. Aby zrobić kwadrat dziewięć razy większy od podanego, trzeba mu dać bok, trzy razy od podanego większy.

154. Aby zrobić kwadrat dziesięć razy większy od podanego; trzeba wziąść ſum-

mę

mę kwadratów: podanego, i dziewięć razy większego.

155. Aby zrobić kwadrat iedenaście razy większy od podanego, trzeba wziąść ſummę kwadratów: dwa razy, i dziewięć razy tak wielkiego, iak ieſt podany.

156. Aby zrobić kwadrat dwanaście razy większy od podanego, trzeba podwoić bok kwadratu potróynego, i na tym boku potróynym kwadrat poſtawić.

157. Aby zrobić kwadrat trzynaście razy większy od podanego; trzeba wziąść ſummę kwadratu poczwornego, i dziewięć razy większego niż ieſt kwadrat podany; albo też poſtawić Troykąt proſtokątny i dać dwa ramiona, iedno trzy razy, a drugie dwa razy większe od boku kwadratu podanego; przeciwproſtkątna oznaczy bok kwadratu trzynaście razy większego od podanego i t. d.

158. Wnioſek z zagadnienia poprzedzaiącego; że kwadrat ramienia iednego przy kącie proſtym, równy ieſt Proſtokątowi i z odcinka iey przyległego temuż ramionowi, przez proſtopadłą zrobionego; ten mówię wnioſek daie ſpoſob ogulnieyſzy, a czaſem i proſtſzy rozwiązania

zania zagadnień w przyſtoſowaniu położonych.

Jakoż ieżeli przeciwproſtkątna ieſt dwa, trzy, cztery i t. d. razy tak wielka, iak odcinek przyległy iednemu bokowi; proſtokąt z tey przeciwproſtkątney i z tego odcinka, będzie też dwa, trzy, cztery i t.d. razy tak wielki, iak kwadrat tego ſamego odcinka; a zatym i kwadrat boku przyległego temu odcinkowi będzie też dwa, trzy, cztery i t. d. razy tak wielki, iak kwadrat tego odcinka, co iaſno być powinno, maiąc w pamięci to, co ſię powiedziało w Arytmetyce na karcie 83, i naſtępuiących o mierzeniu Proſtokątów, a co tu nie zawadzi powtórzyć.

159. *Podanie przybrane* (Lemma). (o) Gdy od punktu któregokolwiek na okrągu koła, poprowadzone będą dwie linie do dwóch końców ſrednicy; kąt przy tym punkcie zrobiony, i zawarty między dwiema temi liniiami będzie proſty.

Niech

(o) *Lemma nazywamy podaniem przybranym, że nie należy właściwie do tey rzeczy, o którey mowa, iże ſię przybiera czaſem z inney części Matematyki dla przyſpoſobienia nas do łatwieyſzego zrozumienia tego, co naſtępuie.*

Niech będzie AKB. połkole, którego AB, ieſt średnią. Weźmy iakikolwiek punkt naprzykład K, na okrągu tego połkola, i po prowadźmy od tego punktu liniie AK, BK, do końców średnicy. Kąt zrobiony przez te dwie liniie ieſt proſty. *Fig.* 2.

Przygotowanie. Pociągniymy promień CK.

Dowdz. Troykąt AKC. ieſt równoramienny, bo AC, równa ſię CK; więc i kąty A, i CKA, naprzeciw tym bokom ſtoiące będą równe; toż mówić i o Tróykącie CKB; a zatym w Troykącie AKB. kąt przy K. będzie równy ſummie kątów A i B; a ponieważ razem z temi dwoma kątami, czyni dwa kąty proſte, więc ſam przez ſię będzie czynił kąt ieden proſty.

160. *Zagadn:* 2. Znaleść kwadrat, który by kilka całe razy, lub wiecey zamykał w ſobie kwadrat dany.

Niech AC, zamyka tyle razy w ſobie AB, ile razy kwadrat którego ſzukamy, ma w ſobie zamykać ten, który ieſt dany. Na AC, iako na średnicy nakreślmy połkole. Od punktu B. wyprowadźmy proſtopadłą BD, przecinaiącą połkole w Punkcie K. Linia AK, będzie ſłużyła za bok kwadratowi żądanemu. *Fig.* 3.

161. *Uwaga.* Trzeba tu pokazać widocznie

nie Uczniom pożyteczność większą i ogulnieyszą Geometryi, niżeli Arytmetyki; ponieważ w Arytmetyce nie można zupełnie wyciągnąć Pierwiastku kwadratowego z liczb całych, które są podwoyne, potróyne, poszostne i t. d. innych liczb kwadratowych. I tak nie można nawet w ułomkach znaleść Pierwiastku kwadratowego liczb 2,3,5,6, i t. d; a w Geometryi, iako się pokazało, znayduiemy i wyznaczamy boki kwadratów poddwóynych, potróynych, poszostnych i t. d.

Można więc powiedzieć, że niepodobność w wyznaczeniu pierwszych ilości, których kwadraty byłyby podwoyne, potróyne, i t. d. innych kwadratów, nie iest w sobie, ale pochodzi tylko od sposobu, którego używamy.

162. *Zagadn.* 3. Maiąc dany Prostokąt, zamienić go na kwadrat iemu równy.

Rozwiąż. Na większy bok Prostokąta, przenieśmy długość boku iego mnieyszego, tak, aby koniec ieden tego boku mnieyszego schodził się z końcem iednym boku większego. Na tymże boku większym, iako na średnicy nakreślmy półkole, a do końca drugiego boku mnieyszego nieschodzącego się z końcem drugim

gim boku większego wyprowadźmy Prostopadłą, i od punktu przecięcia teyże Prostopadłey z połkolem, poprowadźmy linią do tego końca średnicy, który schodzi się z bokiem mnieyszym Prostokąta. Ta ostatnia linia będzie bokiem kwadratu równego Prostokątowi.

164. *Wniosek.* Widzieliśmy w Rozdziale V. iako Figurę każdą prostokreślną można zamienić na Prostokąt. Teraz się pokazało, iak można Prostokąt każdy zamienić na kwadrat; więc każda Figura Prostokreślna, może być i na kwadrat zamieniona.

W Troykącie maiącym kąt ieden roztwarty, kwadrat boku przeciwnego temu kątowi, większy iest od summy kwadratów dwóch innych boków; mnieyszy zaś byłby kwadrat boku przeciwnego kątowi ostremu od summy kwadratów dwóch innych boków w iednymże Troykącie.

Dwa następuiące Twierdzenia, pokażą Rożnicę w Troykącie między kwadratem boku tak przeciwnego kątowi roztwartemu, iako i przeciwnego kątowi ostremu, i kwadratowi dwoch innych boków.

165.

165. *Twierdz.* 2. W Troykącie maiącym kąt roztwarty, spuściwszy prostopadłą od iednego końca boku przeciwnego kątowi roztwartemu, na inny bok którykolwiek; kwadrat tamtego boku, będzie równy summie kwadratów dwóch innych boków, i dwa razy wziętemu Prostokątowi z boku, na który prostopadła spuszczona, rozmnożonego przez odległość od teyże Prostopadley, wierzchołka kąta roztwartego.

Niech będzie Troykąt: ABC, który ma kąt roztwarty przy C. Od końca A, boku AB, przeciwnego temu kątowi, spuśćmy na BC, prostopadłą AD. Kwadrat z AB, równy będzie summie kwadratów z AC, i z BC, i dwa razy wziętemu Prostokątowi z BC, przez CD.

Przygotowanie. Na linii BD. zróbmy kwadrat BDEF, i na dwóch bokach iego weźmy FG, i FL, rowne BC; poprowadźmy przez G, i L, liniie GI. i LC.

Dowodz. Prostokąt FGKL, iest kwadratem z BC; Prostokąt CDIK, iest kwadratem z CD; a Prostokąty obydwa BCKG. i EIKL, są z BC, przez CD.

Kwadrat z AB, rowna się summie kwadratów

dratów z AD, i z BD; to iest ſummie kwadratów z AD, z DC, i z BC, i dwa razy wziętemu Proſtokątowi z BC, przez CD. A że ſumma kwadratów z AD. i DC, równa iest kwadratowi z AC, więc kwadrat z AB, równy iest ſummie kwadratów z AC, i z BC, i dwa razy wziętemu Proſtokątowi z BC. przez CD.

166. *Przykład.* Niechby Troykąt ACD był połową, Troykąta równobocznego; to iest niechby linia AC była połową linii CD. Proſtokąt z BC, przez CD, dwa razy wzięty, byłby równy Proſtokątowi BC, przez CA; a ſam przez ſię byłby tylko iego połową. Ten przypadek ſzczególny można wyrazić w ſłowach naſtępuiących „ *W Troykącie, którego kąt roztwartu równa ſię ſummie kąta proſtego i trzeciey części iego*; kwadrat boku przeciwnego kątowi roztwartemu, równy iest ſummie kwadratów innych dwóch boków, i Proſtokątowi z tychże boków.

167. *Twierdz:* 3. W troykącie iakimkolwiek uważaiąc ieden kąt oſtry, a od końca boku przeciwnego temu kątowi ſpuściwſzy proſtopadłą na iedno ramie iego; kwadrat tego boku równać ſię będzie różnicy między ſummą kwadratów ramion obydwóch kąta tego oſtrego, i dwa razy

wzię-

wziętym Prostokątem z ramienia, na które prostopadła iest spuszczona, i z odległości wierzchołka kąta ostrego od prostopadłey.

Fig. 5. Niech będzie Troykąt ABC, w którym kąt C iest ostry. Od końca A, boku przeciwnego AB, spuśćmy Prostopadłą AD, na ramię BC, kąta ostrego. Kwadrat z AB równy będzie różnicy między summą kwadratów z AC, i z CB, i dwa razy wziętym Prostokątem którego bokami będą BC, i CD.

Przygotowanie. Zróbmy kwadrat z CB, BCEF. Naznaczmy Liniie FG, FL, równe A B; i CI równą CD. Poprowadźmy ieszcze liniie: DL, IG. Przeciągniymy DL i CE do M i N, tak, aby LM, EN równe były CD. Złączmy ich końce liniią MN. Prostokąt ELMN, równy będzie kwadratowi z CD.

Dowodz: Kwadrat z AB równy iest summie kwadratów z AD, i z BD. Kwadrat z BD, to iest FGHL, równy iest kwadratowi BCEF, z BC, mniey summą dwoch prostokątów: BGIC, i EIKL; albo dodawszy, i odiąwszy kwadrat ELMN, z CD; kwadrat z BD będzie równy summie kwadratów: BCEF, i ELMN, mniey summą

Pro-

Prostokątów BGIC, EIHL, i kwadratu ELMN, czyli mniey summą Prostokątów BGIC, i IKMN; które obadwa są Prostokątami z boków BC, i CD; a zatym kwadrat z AB, iest równy summie kwadratów z AD, z CD, i z BC, mniey dwa razy wziętym Prostokątem z BC, przez CD. A że summa kwadratów z AD, i CD, równa się kwadratowi z AC, więc kwadrat z AB, równy iest summie kwadratów z AC i z BC, mniey dwa razy wziętym Prostokątem z BC. przez CD.

168. *Przykład.* Niechby Troykąt AC D. był połową Troykąta rownobocznego, a zatym AC, dwa razy większa od CD; W takim razie kwadrat z AB, będzie równy summie kwadratów z AC, i z BC, mniey Prostokątem z tychże boków AC; i BC. Co tak można wyrazić: *W Troykącie, którego kąt ieden równa się kątowi prostemu, mniey trzecią iego częścią, kwadrat boku przeciwnego temu kątowi równać się będzie różnicy między summą kwadratów z ramion tegoż kąta, i Prostokątem z tychże ramion.*

169. *Wnioski i Przysłowania dwóch Twierdzeń ostatnich.*

1. Jeżeli w Troykącie kwadrat iednego boku

boku równy iest ſummie kwadratów z ramion kąta przeciwnego, albo większy lub mnieyſzy od tey ſummy; kąt też przeciwny będzie proſty, albo roztwarty, lub oſtry.

2. W każdym Troykącie, Proſtokąt dwa razy wzięty, z boku któregokolwiek i z odległości wierzchołka kąta iednego przy tym boku, od proſtopadłey ſpuszczoney na tenże bok, z wierzchołka kąta iemu przeciwnego, ten mówię dwa razy wzięty Proſtokąt, równy iest różnicy między ſummą kwadratów z dwóch ramion, i kwadratem boku przeciwnego temu kątowi; to iest równy będzią ſummie tych dwóch kwadratów, mniey kwadratem boku przeciwnego, gdy kąt iest oſtry; a gdy roztwarty, to ten Proſtokąt dwa razy wzięty, równy będzie kwadratowi boku przeciwnego, mniey ſummą kwadratów z ramion; a zatym ieżeli wiadome nam ſą w liczbach boki Troykątu: doydziemy ztąd w liczbach i proſtokąta tego podwoynego; doydziemy i odcinka (Segmentum) podſtawy, zawartego między wierzchołkiem kąta, o którym iest rzecz, i proſtopadłą. Aże kwadrat wyſokości Troykąta, równa ſię różnicy między kwadratem boku przyległego odcinkowi, i kwadratem tegoż odcinka, więc

doy-

doydziemy i wyſokości Troykąta, a zatym i powierzchni iego.

170. *Przykład.* 1. Niech będą trzy boki: BC, AB, AC. w liczbach oznaczone: pierwſzy 21, drugi 20, trzeci 13.

Kwadrat z AB, ieſt: 400.

Smma Kwadratów z BC. i AC, ieſt ſumma z 441, i z 169, to ieſt: 610.

Ta ſumma ponieważ ieſt większa, niż kwadrat z AB, przeto kąt przy C, ieſt oſtry.

Różnica między tą ſummą i kwadratem z AB, ieſt: 210, która to różnica równa ſię podwoynemu Proſtokątowi z BC, przez CD, czyli liczbie znaczącey długość boku BC, rozmnożoney przez liczbę oznaczaiącą długość odcinka CD, dwa razy wziętą. Ten Proſtokąt poiedynczy wyrazi ſię więc przez 105. Aże BC oznaczone ieſt przez 21, więc długość CD, będzie 5. Kwadrat z AD równa ſię różnicy między kwadratem z AC i kwadratem z CD; to ieſt różnicy między 169, i 25; Ta różnica ieſt: 144, więc AD, będzie oznaczone przez 12. Powierzchnia Troykąta CAB, ieſt połową Proſtokątu z BC, przez AD; to ieſt 126.

171. *Przykład* 2. Niech będzie BC 11, AB 20, AC, 13. Kwadrat z AB, będzie 400.

Sum-

Summa kwadratów z BC, i z AC, będzie ſumma z 121. i 169, to ieſt: 290.

Ta ſumma ponieważ ieſt mnieyſza od kwadratu z AB; przeto kąt przy C. będzie roztwarty.

Rożnica między tym kwadratem, i tą ſummą ieſt: 110; która to różnica rowna ſię podwoynemu Proſtokątowi z BC, przez CD, a zatym Poiedynczy Proſtokąt będzie = 55 Aże BC. równa ſię 11; więc CD, będzie ſię równać: 5.

Kwadrat z AD, równa ſię różnicy między kwadratem z AC, i kwadratem z CD; to ieſt różnicy między 169 i 25. Ta różnica ieſt: 144. więc AD. będzie = 12; a powierzchnia Troykąta będzie 6. razy 11, to ieſt 66. Trzeba na więcey ieſzcze przykładach wprawiać uczniów, dobieraiąc po większey części liczb takich, aby Pierwiaſtki kwadratowe zupełnie w liczbach całkowitych wychodziły.

Przykłady:	*Boki*	*Podſtawa*
51 i 25	-	52, albo 38
52 i 29	-	69 albo 27
17 i 39	-	44 albo 38
68 i 87	-	95 albo 31.

172. *Przestroga* 1. Dla większey wygody; używać na potym będziemy skróconych wyrażeń, których tu znaczenie wykładamy.

Znak ten: = wyrażać będzie równość między dwoma ilościami.

Znak: + gdzie iedna liniia prosto drugą przecina, wyrażać będzie dodanie iedney ilości do drugiey; i wymawia się tym słowem: *więcey* (plus) Naprzykład, 4 + 5 = 9, wymawia się cztery więcey piącią, równa się dziewiącią.

Znak: − wyrażać będzie odeymowanie iedney ilości od drugiey; i wymawia się tym słowem: *mniey*, (minus) Naprzykład: 7 − 4 = 3; wymawia się: siedm mniey czterema, równa się trzem.

Dla oznaczenia rozmnożenia liczb, w Arytmetyce, albo Prostokąta z dwóch linii w Geometryi, używać będziemy znaku: × to iest krzyża ukośnego. Naprzykład 4 × 3. znaczy cztery przez trzy rozmnożone, AB × CD, znaczy Prostokąt z linii AB, i CD; albo Prostokąt z AB, przez CD. Dzielenie oznacza się tym znakiem: to iest dwiema kropkami, iedną pod drugą, które kładą się po ilości podzielney, a przed ilością dzielącą. Naprzykład 6: 2, znaczy 6, przez 2. podzielone. Można także dzielenie i sposobem ułomków wyrażać kła-

kładąc za licznika ilość podzielną, a za mianownika, ilość dzielącą kwadrat iakiey ilości, naprzykład linii AB, iednym z tych dwóch ſpoſobem zwykł ſię wyrażać AB^2, albo AB^2, częściey iednak pierwſzym.

I tak pierwſze Twierdzenie można było w ten ſpoſob wyrazić:

Fig. 1, $AB^2 = AC^2 + BC^2$

Fig. 4. Szoſte $AB^2 = AC^2 + BC^2 + {}_2BC \times CD$

Fig. 5. Siodme $AB_2 = AC^2 + BC^2 - {}_2BC \times CD$

Wſzyſtkie trzy tych Twierdzeń przypadki, takby razem mogły być wyrażone: $AB^2 = AC^2 + BC^2 \pm {}_2BC \times CD$. W tym razie, gdzie kąt ieſt proſty, linija CD, a zatym i proſtokąt $BC \times CD$. niknie.

173. *Przeſtroga* 2. Trzeba oſtrzedz Uczniów, aby używaiąc tych ſkróconych wyrazów, mieli zawſze przed oczyma Figury ſtoſuiące ſię do tychże wyrazów, i dobrze ie rozważali. Należy także uſtnie pierwey wyrazyć każde Twierdzenie lub zagadnienie, nim ſię przyſtąpi do piſania ich znakami wyraz ſkracaiącemi. I owſzem lepieyby było, aby poty tych znaków nie używać, póki zupełney wprawy nie nabiorą Uczniowie w wyłożeniu uſtnym a iaſnym Twierdzeń i Zagadnień im podanych.

ROZ-

ROZDZIAŁ VII.

O Liniiach ſtycznych z kołem; o kątach przy okręgu koła; i o kątach, których wierzchołki ſą między okręgiem, albo za okręgiem.

174. *Definicye.* Koła równe ſą te, których promienie ſą równe; i takie koła przyſtać mogą do ſiebie.

Gdyby to podanie niezdawało ſię być tak oczywiſtym, aby go przypuścić można za Definicyą; tedy możnaby dowieść go tymże ſamym ſpoſobem, którym wyłożyliśmy w Rozdziale I. tworzenie ſię koła; (8) pokazuiąc, iż dwie liniie równe, obrotem, ſwoim około iednego i nie poruſzonego końca, nie mogą zrobić, tylko równe dwa koła; albo też uważaiąc te dwie liniie, iak gdyby iedna leżała na drugiey, i iak gdyby obydwie razem czyniły ten obrot; w takim razie, iakiekolwiek będzie położenie ſpólne tych dwóch linii, ponieważ zawſze iedna do drugiey przyſtaie, więc i te miey-ſca, które przeyść maią w tymże ſamym czaſie, i te, które iuż przeſzły w czaſach równych, rachuiąc od początku ich obrotu, przyſtałyby do ſiebie; a zatym i całe

te mieyſca, czyli koła, któreby zrobiły, mogłyby też do ſiebie przyſtać.

Końce tych dwóch linii tak ſię obracaiących, w czaſach równych, zrobiłyby łuki równe; a zatym w kołach równych, kąty przy ich środkach równe, zamykaią ſwemi ramionami łuki równe.

Wzaiemnie gdy w równych kołach, równe łuki weźmiemy, kąty w środkach tych kół które między ramionami ſwemi zamykaią te łuki, będą równe.

Tab. X. Fig. 1. Nich będą dwa łuki równe: BA, ba, w dwóch równych kołach. Kąty: ACB, acb, które wierzchołki ſwoie maią w środkach tych kół, i które zamykaią ſwemi ramionami te łuki, ſą też równe. Bo gdyby kąty ACB, acb, nie były równe, kąt naprzykład ACB, gdyby był mnieyſzy od kąta acb; to kąt inny, naprzykład DCB, byłby równy kątowi acb; a zatym i łuki DB, ab, byłyby równe; ale że wzieliśmy za równe łuki AB i ab, więc łuki także AB i DB, byłyby równe, co ieſt nie podobna, chyba żeby linie CD, i CA iednę tylko linią czyniły, zupełnie do ſiebie przyſtaiąc.

Część koła zawartą między dwoma pro-

promieniami i łukiem, zwać będziemi wycinkiem koła, (Sector Circuli.)

Z tego, co się wyżey powiedziało, wnieść można, że w równych kołach i wycinki te przystać mogą do siebie, których kąty, albo łuki są równe; a wzaiemnie, że kąty i łuki są równe w tych wycinkach, które przystać do siebie mogą.

W kołach równych, łuki równe, maią też i cięciwy równe. Jakoż w takich dwóch kołach Troykąty równoramienne, złożone z cięciwy i z dwóch promieni, mogą przystać do siebie, dla równości promieni, i kątów w środku, które na równych łukach wspieraią się.

Wzaiemnie, ieżeli w kołach równych cięciwy są równe, łuki też równe będą; bo Troykąty złożone z tych cięciw, i z promieni równych, maiąc trzy boki równe, mogą przystać do siebie, i kąty w środku, zrobione przez dwa promienie będą równe, a zatym i łuki im przeciwne, równe będą.

Przez *odcinek koła* (segmentum Circuli) rozumieć będziemy mieysce zawarte między łukiem i cięciwą.

Gdy cienciwa nie ieſt razem średnicą, dzieli koło na dwa odcinki, ieden większy, a drugi mnieyſzy od półkola. Takie dwa odcinki, nazywaią ſię odcinkami *na przemian* (Alterna.)

W dwoch równych kołach, ieżeli dwa odcinki maią równe łuki, przyſtać do ſiebie mogą. Jakoż te odcinki ſą różnicami dwóch wycinków maiących równe łuki, od dwoch Troykątów, które za podſtawy maią cienciwy tychże łuków równych.

Aże te wycinki mogą przyſtać do ſiebie, bo maią łuki równe; Troykąty mogą też do ſiebie przyſtać, bo maią wſzyſtkie trzy boki równe.

Więc i dwa odcinki, przyſtać mogą do ſiebie, będąc różnicą dwoch Troykątów równych, od dwóch wycinków równych.

Wſzyſtko to, co ſię teraz powiedziało, trzeba przyſtoſować do łuków, cienciw, wycinków, odcinków iednego koła.

Te podania powinnyby ſię wydawać oczywiſtemi, i nie potrzebować wcale żadnego dowodzenia, i z tey przyczyny ſą

bardzo

bardzo zdatne, aby się na nich wprawiali Uczniowie w tłomaczenie się iak naydokładnieysze z tych nawet wyobrażeń, które im iuż wystawuią rzecz iaką dosyć iaśnie; i aby tym sposobem wyobrażenia w sobie proste, prościeyszemi ieszcze czynić uczyli się.

175. *Twierd.* 1. Prostopadła ciągniona od środka cienciwy, przechodzi przez środek koła.

2. Linia prosta prowadzona od środka koła do środka cienciwy, iest do niey prostopadłą.

3. Prostopadła od środka koła spuszczona na cienciwę, przypada na iey środek.

Fig. 2.

Niech będzie AB, cienciwa w kole, którego środek C, a promień CA.

1. Prostopadła od środka D. cienciwy wystawiona, przechodzi przez środek koła.

Dowodz. W tey prostopadley wszystkie punkta iednakowo są odległe od dwóch końców cienciwy; a że i środek koła iednakowo iest odległy od dwóch końców teyże cienciwy; więc będzie też znaydował się na tey prostopadley.

2. Li-

2. Linia CD, od środka koła poprowadzona do środka cienciwy, iest do niey prostopadłą.

Dowodz. Troykąty: DCA, DCB, maią wszystkie boki równe; więc mogą przystać do siebie, a w szczególności kąty przy D. są równe, a będąc kątami przyległemi, obadwa proste być muszą, a zatym liniia CD, iest prostopadła do AB.

3. Prostopadła CD, spuszczona od środka koła na cienciwę AB, przypada na iey środek.

Dowodz. W Troykącie Rownoramiennym ACB, kąty A i B są równe; więc w Troykątach prostokątnych: ACD, BCD, wszystkie kąty równe będą iedne względem drugich; aże i boki AC, CB. są równe, więc te dwa Troykąty przystać do siebie mogą, a w szczególności liniie AD, i BD, są równe.

176. *Wniosek.* Koło nie może mieć więcey, iak dwa punkta spolne z liniią prostą; bo gdyby mogło mieć więcey takich spolnych punktów, naprzykład trzy; złączywszy iedną linią punkt pierwszy z drugim, a drugą punkt drugi z trzecim, i od środka koła poprowadziwszy do tych dwoch linii dwie prostopadłe, te uczyniłyby

łyby Troykąt maiący dwa kąty proſte, co ieſt nie podobna.

177. *Zagad.* 1. Maiąc dane trzy punkta, których położenie nie ieſt w linii proſtey; nakryślić koło, któreby przez te trzy punkta przechodziło.

Rozwiąz. Ponieważ środek koła powinien ſię znaydować na każdey proſtopadłey poprowadzoney od środka linii łączącey dwa punkta znayduiące ſię w kole ieżeli tedy pierwſzy z punktów danych złączemy liniią z drugim, a drugi z trzecim, i od środka tych dwóch linii poprowadziemy Proſtopadłe; te przetną ſię w punkcie, który będzie środkiem koła maiącego przechodzić przez trzy punkta dane.

178. *Przyſtoſowanie.* Znaleść środek koła danego.

Rozwią. Na okrągu koła, weźmy trzy iakiekolwiek Punkta, a przez poprzedzaiące zagadnienie ſzukaymy środka koła przez te trzy punkta przechodzącego.

179. *Wnioſek.* Ponieważ proſtopadłe wyſtawione na środku dwóch linii łączących punkt ieden dany z dwoma innemi,

mi; nie mogą się przecinać tylko w iednym punkcie; więc nie może być więcey iak iedno koło przechodzące przez te trzy punkta; albo ieżeli dwa koła przechodziłyby przez te trzy punkta, toby nie były tylko iednym w rzeczy samey kołem; a zatym gdy dwa koła się przecinaią, nie więcey mogą mieć iak dwa punkta spólne w przecięciach. Ta własność koła, że ie z trzech punktów danych wyznaczyć można, iako i ta druga, że wszystkie iego promienie są równe; różni koło od wszystkich krzywych Linii; podobnie iako Linija prosta rożni się przeto od krzywych linii, że dosyć iest mieć dwa punkta dane, aby ią wyznaczyć.

180 *Twierdz:* 2. Od końca promienia koła wyprowadziwszy Prostopadłą do tegoż promienia; wszystkie inne punkta tey prostopadłey będą za kołem.

Dowodz: Odległością którегokolwiek z tych innych punktów, od środku koła, iest przeciwprostkątna Troykąta, którego bokiem iednym iest promień koła, a że przeciwprostkątna większa iest od iednego z boków Troykąta; więc i odległość od środka kóła, punktu którегokolwiek na prostopadłey, oprócz tego, któ-

który iest końcem promienia, większa iest od tegoż promienia; a zatym każdy z tych punktów będzie za kołem.

181. *Defin.* Gdy prosta linia ieden tylko ma punkt spolny z okręgiem koła, taka linia nazywa się styczną z kołem (Tangens Cyrculi.)

182. *Zagadn.* 2. Maiąc dany punkt na okręgu koła, poprowadzić przez niego styczną.

Rozwiąż. Punkt dany z środkiem koła złączmy promieniem; i od tegoż punktu wyprowadźmy prostopadłą do promienia; a ta sama będzie i styczną z kołem w punkcie danym.

183. *Zagadń.* 3. Od Punktu danego za kołem, poprowadzić do tegoż koła, styczną.

Rozwiąz. Złączmy linią, pukt dany z środkiem koła. Na teyże linii, iakó na średnicy, nakreślmy połkole; punktem, gdzie okrąg połkola przecinać będzie koło dane, będzie tym samym punktem, do którego poprowadzona linia od punktu danego, będzie styczna z kołem (159.)

To

To zagadnienie dwoiako może być rozwiązane; gdyż połkole z iedney lub z drugiey ſtrony średnicy nakreślić można.

184. *Twierdz.* 3. Od końca promienia poprowadziwſzy ſtyczną z kołem, ieżeli przez punkt, w którym ſię ta ſtyczna koła dotyka, przeciągniemy inną iaką linią proſtą, ta przecinać będzie okrąg koła.

Dowodz. Promień koła ieſt proſtopadły do ſtycznéy w końcu tegoż promienia, a zatym pochyły będzie do każdey inney linii; przez ten koniec promienia, to ieſt punkt koła przychodzącey. Poprowadziwſzy więc proſtopadłą od ſrzodka koła do tey linii; ta proſtopadła krótſza będzie od promienia; bo promień będzie przeciwproſtkątną tego Tróykąta, którego ta proſtopadła będzie tylko bokiem; aże koniec promienia ieſt na okręgu koła, więc koniec tey proſtopadłey nie doydzie do okręgu koła. Już tedy ieden punkt tey linii będzie w kole, a drugi w ſamym okręgu koła, na końcu promienia; a zatym liniia ta przechodząca przez koniec promienia, ponieważ drugi ſwóy punkt ma w kole, przecinać go muſi.

185. *Twierdz.* 4. Jeżeli liniia proſta ieſt ſtyczną z kołem, będzie:

1. Pro-

1. Promień poprowadzony od punktu tego, gdzie się linija styka z kołem będzie do tey styczney prostopadłym.

Jakoż, gdyby promień do punktu tego poprowadzony, nie był do styczney prostopadłym, tedy linija inna prostopadła do tego promienia, i przechodząca przez iego koniec, byłaby styczną z kołem, a ta pierwsza zamiast stykania się z kołem, przecinałaby go, iako się w poprzedzaiącym twierdzeniu okazało.

2. Prostopadła do styczney, od punktu do tknięcia ciągniona, przechodzi przez środek koła.

Gdyby ta prostopadła nie przechodziła przez środek koła, tedyby iednak promień do tegoż punku do tknięcia ciągniony był prostopadłym do styczney, a zatym od iednego punktu, to iest od punktu do tknięcia, możnaby dwie prostopadłe prowadzić, co iest niepodobna.

186. *Uwaga.* Pokazaliśmy (59) własność kąta, którego wierzchołek iest na okręgu koła, a którego dwa ramiona wspieraią się na końcach średnicy tegoż koła; to podanie było tylko przypadkiem szczególnym podania daleko ogulnieyszego.

go, w którym się dowodzi, że wszystkie te kąty są równe, które wierzchołek maią na okręgu koła, a ramionami wspieraią się na końcach równych łuków tegoż koła.

187. *Twierdz.* 5. Kąt maiący swoy wierzchołek na okręgu koła, a którego ramiona są cięciwami tegoż koła, iest połową innego kąta, który ma wierzchołek w samym koła środku, a ramionami swemi obeymuie tenże sam łuk, co i kąt pierwszy.

Fig. 3. Niech będą kąty ACB, ADB, z których pierwszy ma wierzchołek w środku C, koła, a drugi na okręgu tegoż koła w punkcie D; i niech obadwa te kąty obeymuią ramionami swemi tenże sam łuk AB. W takim razie kąt ACB dwa razy iest większy od kąta ADB.

Przypadek 1. Gdy iedno ramie AD kąta ADB, iest razem i średnicą koła.

Dowodz. Troykąt BCD, iest równoramiennym, więc kąty B i D będą równe, a summa ich, dwa razy większa od iednego z nich; ale że kąt ACB, iako zewnętrzny, rowna się tey summie kątów B i D, więc dwa razy iest więszy od iednego z nich, naprzykład od kąta D.

Przy-

Przypadki te, w których żadne ramie kąta ADB nie byłoby razem średnicą koła, można łatwo przywieść do przypadku pierwszego, poprowadziwszy średnicę DE. *Fig. 4 i 5*

Przypadek 2. Gdy środek C, iest między ramionami kąta ADB.

Dowod. Kąt ADB, składa się z dwóch kątów: ADE, i BDE, a kąt ACB składa się także z dwóch kątów: ACB i BCE; a że podług dowiedzenia w pierwszym przypadku, każdy z tych dwóch ostatnich kątów, iest dwa razy większy od iednego z pierwszych, którego ramiona obeymuią tenże sam łuk; więc obadwa razem pierwsze kąty są też dwa razy większe od obydwóch razem kątów drugich; a zatym kąt ACB, dwa razy iest większy od kąta ADB. *Fig. 4*

Przypadek 3. Gdy środek C, nie iest między ramionami kąta ADB.

Dowodz. Kąt ECB, dwa razy iest większy od kąta EDB; (1. Przypadek) tenże kąt ECB, składa się z dwóch kątów: ECA, ACB; kąt także EDB, składa się z dwóch kątów: EDA, ADB; a że kąt ECA dwa razy iest większy od kąta EDA (1. Przyp:) więc i kąt ACB, większy dwa razy będzie od kąta ADB. *Fig. 5.*

188. *Uwaga.* Uczniowie poczynaiący, więcey doznawać zwykli trudności, w poięciu tego trzeciego przypadku, niż drugiego, w którym przez dodawanie to ſamo ſię dowodzi, co w trzecim przez odeymowanie. Można im to w ten ſpoſob obiaśnić, że dwie naprzykład liczby 12, i 8, z których pierwſza dwa razy ieſt większa od 6, a druga od 4, te mowię dwie pierwſze liczby, gdy dodane będą, ſumma ich: 20, będzie też większa dwa razy od ſummy dwóch drugich liczb 6, i 4, to ieſt od 10. A przeciwnie gdy naprzykład 12, i 8; pierwſze większe ieſt dwa razy od 6. a drugie od 4, różnica między 12, i 8, to ieſt 4, dwa razy też większa będzie od różnicy między 6, i 4, to ieſt od 2.

Gdyby tego była potrzeba, możnaby i na liniiach to ſamo okazać.

Fig. 6. Niech będzie Liniia AB, większa dwa razy od CD, i AE większa tak że dwa razy od CF. Od punktu E, naznaczywſzy na linii AB, Liniie EG, EH, równe liniiom FC, FD; Liniie: AG. i BH, będą tak iedna, iako i druga oznaczać różnicę Linii AE, od CF; ſumma zaś tych dwóch linii AG, i BH, oznaczy różnicę całey linii AB, od całey linii CD.

189.

189. *Wnioſek.* Kąty przy okręgu koła, które ramionami ſwemi iednakowe łuki obeymuią, ſą równe; albo, co na iedno wychodzi, kąty w tymże ſamym odcinku koła ſą równe. Że tak w ſamey rzeczy ieſt co do kątów przynaymniey oſtrych, to ieſt: których ramiona obeymuią łuk mnieyſzy od pół okręgu wynika to z Twierdzenia poprzedzaiącego. Z naſtępuiącego zaś wnieść będzie łatwo można, że to ſamo ma mieyſce i w kątach przy okręgu koła, których ramiona obeymuią okrąg większy od pół okręgu.

190. *Twierdz.* 6. Summa kątów w odcinkach na przemian, (174.) równa ſię dwom kątom proſtym; albo co iedno znaczy, ieżeli czworokąt ieſt kołem obwiedziony, ſumma kątów przeciwnych tego czworokąta, równa ſię dwom kątom proſtym.

Niech cięciwa AB, dzieli koło na dwa odcinki: ADB, ACB; kąt ADB, w iednym odcinku, wraz z kątem ACB w drugim odcinku, wyrównywa dwom kątom proſtym; albo, ſumma kątów D, i C, czworokąta kołem obwiedzionego, równa ſię dwom kątom proſtym. *Tab. XI Fig. 1*

Przygotowanie. Poprowadźmy Przekątną DC.

Dowod

Dowodz. Kąty ADC, ABC, obeymuią obadwa ramionami swemi łuk ieden AC, mnieyszy od pół okręgu; więc są równe. Dla teyże przyczyny i kąty BDC, BAC, są równe. Summa tedy kątów ADC, BDC, to iest kąt ADB, równa się summie kątów: ABC, BAC a zatym summa kątów ADB, ACB, równa iest summie trzech kątów Troykąta ABC; a ponieważ ta ostatnia summa wyrównywa dwom kątom prostym, więc i tamta.

Powtorzenie. Jeżeli cienciwa iest razem i średnicą, dzieli koło na dwa półkola, a w każdym tym półkole, kąty są proste.

Jeżeli cienciwa nie iest średnicą: dzieli koło na dwa odcinki, ieden większy, a drugi mnieyszy od pół okręgu; kąt w większym odcinku wspiera się na łuku mnieyszym od pół okręgu, i iest ostry; iednakowey zawsze wielkości. Kąt zaś w mnieyszym odcinku wspiera się na łuku większym od pół okręgu, i iest roztwarty, dopełniaiący zawsze dwóch kątów prostych, z kątem ostrym w drugim odcinku.

191. *Twierdz.* 7. Jeżeli od punktu w odcinku koła, lub za odcinkiem będącego, do końców podstawy tego odcinka poprowadziemy dwie linie, kąt między temi dwiema liniiami zawarty będzie w pierwszym razie większy, a w drugim mnieyszy od kąta w samym odcinku.

Niech będzie punkt D, w odcinku albo za odcinkiem CAB; poprowadźmy od punktu tego, do końców Podstawy AB, tegoż odcinka Liniie DA, DB, kąt ADB, będzie większy w pierwszym razie, a mnieyszy w drugim, od kąta ACB. *Fig.* 2.

Dowodz. W pierwszym razie, kąt ADB, iest zewnętrzny Troykąta DBC, więc iest większy od iednego z wewnętrznych kątów tegoż Troykąta; to iest od kąta ACB, w samym odcinku.

W drugim razie, kąt ACB, iest zewnętrzny Troykąta CDB, a zatym większy od kąta D, albo, co na iedno wychodzi, kąt D, iest mnieyszy od kąta C, w odcinku.

192. *Uwaga* 1. W pierwszym razie, gdzie ramie BD przedłużone spotyka okrąg w punkcie E, kąt ADB, równa się summie kątów: BCD, CBD, a kąt CBD obeymuie swemi ramionami łuk EC, który też łuk zawarty iest między przedłużeniami ramion AD, BD, kąta ADB.

W drugim razie, gdzie ramie BD przecina okrąg w punkcie E: kąt ADB mnieyszy iest od kąta ACB, w odcinku, kątem CBD; który to kąt CBD obeymuie swemi ramionami łuk CE, a ten łuk CE, mnieyszy

szy iest od łuku AB, obiętego od tychże ramion AD, BD kąta ADB.

193. *Uwaga* 2. Na okręgu koła znayduią się te wszystkie punkta, od których poprowadziwszy dwie liniie do dwóch punktów danych, kąt między dwiema temi liniiami zawarty, iednakowy zawsze będzie: to iest, okrąg koła iest *mieyscem* (Locus) tych wszystkich punktów.

194. *Defin.* Kąt zawarty między styczną z kołem i między cienciwą przez punkt dotknięcia prowadzoną, nazywa się *kątem odcinka.*

195. *Twierdz.* 8. *Kąt odcinka*, równa się kątowi *w odcinku na przemian.*

Fig. 3. Niech będzie ABD kąt odcinka, między BD, styczną z kołem, i BA. cienciwą przechodzącą przez B, punkt dotknięcia. Ten kąt równy iest kątowi któremukolwiek w odcinku na przemian, naprzykład kątowi BEA, którego iedno ramie BE iest średnicą do punktu dotknięcia B, poprowadzoną.

Dowod. Kąt EBD, między średnicą EB, i styczną BD, zawarty, iest prosty (185) to iest summa kątów: ABE, i ABD, czyni kąt prosty.

Kąt

Kąt A w półkole iest też prosty (159) więc summa kątów ABE, AEB, w tymże samym Troykącie równa także będzie kątowi prostemu. A zatym kąt ABE tak z kątem AEB, iak i z kątem ABD, czyni kąt prosty. Muszą tedy równe być kąty AEB, i ABD, kiedy przydany każdy z osobna do kąta ABE, czyni równą summę.

196. *Zagadn.* 4. Na linii daney zrobić odcinek koła, w którym odcinku zmieściłby się kąt dany.

Niech będzie liniia AB, na którey zrobićby trzeba ten odcinek. *Fig.* 3.

Rozwiązanie. Od punktu B. prowadzę liniią BD, czyniącą kąt dany z linią daną BA. Od tegoż punktu B, wyprowadzam prostopadłą do BD, a od punktu A, drugą prostopadłą do AB. Punkt E, przecięcia tych dwóch prostopadłych, wyznaczy mi wielkość średnicy BE, należącey do tego koła, w którego odcinku ma się mieścić kąt dany.

Albo też: Od środka linii daney AB. prowadzę Prostopadłą, która przetnie liniią BE. w punkcie maiącym służyć za środek koła, w którym będzie odcinek żądany.

Zamiaſt robienia kąta ABD, równego danemu, możnaby zrobić kąt ABE, dopełniaiący kąt dany do 90. ſtopniów, to ieſt czyniący z nim razem kąt proſty.

197. *Zagadn.* 5. Maiąc dane koło, oddzielić od niego odcinek, w którymby ſię zmieścił kąt dany.

Rozwiąz. Od punktu któregokolwiek na okręgu koła danego, ciągnę ſtyczną, a przez punkt dotknięcia prowadzę cięciwę czyniącą kąt dany z ſtyczną. Ta cięciwa oddzieli w kole odcinek żądany.

198. *Zagadn.* 6. W koło dane wpiſać (inſcribere) Troykąt, któryby miał kąty wſzyſtkie równe kątom Troykąta danego.

Rozwiąz. 1. Pociągnąwſzy ſtyczną przez którykolwiek punkt okręgu koła, przez tenże punkt prowadzę dwie cięciwy po prawey i po lewey ręce, czyniące dwa kąty równe kątom Troykąta danego. Linija trzecia łącząca końce tych dwóch cięciw, będzie trzecim bokiem Troykąta, którego kąty wſzyſtkie równe będą kątom Troykąta danego.

Rozwiąz. 2. Troykąt dany opiſuię (circumſcribo) kołem, i do trzech wierzchoł-

chołków kątów, prowadzę od środka trzy promienie. Od tegoż samego środka, kreślę koło, promieniem koła danego. Punkta, w których okrąg tego drugiego koła, przecinać będzie promienie trzy pierwszego, będą wierzchołkami kątów Troykąta, którego szukam.

199. *Zagadn.* 7. Maiąc dany Troykąt, wpisać weń koło; to iest nakreślić takie koło, któreby się dotykało trzech boków tego Troykąta.

Rozwiąz. Srodek tego koła, ponieważ iednakowo ma być odległy, od wszystkich trzech boków Troykąta danego, musi się gdzieś znaydować na linii dzielącey kąt którykolwiek Troykąta na dwie równe części, gdyż tey linii odległość punktów, wszędzie będzie równa od dwóch boków Troykąta iey przyległych; podzieliwszy na dwie równe części, i drugi kąt Troykąta drugą linią; tam gdzie ta druga liniia przetnie pierwszą, będzie środek koła, którego szukamy, bo ten punkt przecięcia będzie iednakowo odległy od wszystkich trzech boków Troykąta danego.

200. *Zagadn.* 8. Maiąc dane koło, opisać na nim (circumscribere) Troykąt, któ-

ryby

ryby miał kąty wszystkie równe kątom Troykąta danego.

Rozwiąz. 1. W Troykąt dany wpisuię koło; i do Punktów trzech dotknięcia, prowadzę trzy promienie. Od tegoż samego środka kreślę drugie koło, promieniem koła danego. Punkta, w których okrąg tego drugiego koła przecinać będzie promienie trzy pierwszego, albo ich przedłużenia oznaczą trzy punkta dotknięcia trzech boków Troykąta, którego szukam.

Rozwiąz. 2. W czworokącie, który się zrobi z dwóch promieni koła danego, i z dwóch stycznych z kołem w końcach tychże promieni, kąty dwa między temi promieniami i stycznemi będą proste, a zatym kąt ieden między dwiema stycznemi, i drugi kąt między dwoma promieniami, będą razem wzięte, równe dwom kątom prostym. (85) Ztąd wypada wykreślenie następuiące.

Prowadzę promień ieden w kole danym; po obydwóch stronach tego promienia, prowadzę dwa inne czyniące z pierwszym dwa kąty, równe kątom dwom dopełniaiącym dwa ktorekolwiek kąty Troykąta, do 180 stopniów, to iest równe

dwom

dwom kątom przyległym (14) do dwóch którychkolwiek kątów tegoż Troykąta. Przez końce tych trzech promieni przeciągam trzy ſtyczne, te zrobią Troykąt żądany.

ROZDZIAŁ VIII.

Wſtęp do Proporcyi przez przykłady Geometryczne, z przyſtoſowaniem w ſzczegulności do Troykątów podobnych, a w ogulności do innych Figur proſtokreślnych także podobnych.

DOtąd uważaliśmy tylko wielkość różnych Ilości i Figur, co do przyſtawania iednych do drugich, czyli do ich równości. Teraz też ſame ilości porównywać z ſobą będziemy w ſpoſob ogulnieyſzy.

201. *Uwagi.* Widzieliśmy, że dwa równoległoboki, które miały iednakową podſtawę i wyſokość, były równe. Weźmy teraz dwa równoległoboki z równą wyſokością, ale z nie iednakową podſtawą; i obaczmy co za różnica wypadnie między temi dwoma równoległobokami, z przyczyny nierówności ich Podſtaw.

Jeżeli

Jeżeli podstawa iednego z tych równoległoboków, dwa, trzy, cztery, i t. d. razy, większa będzie od podstawy drugiego; da się podzielić ten pierwszy równoległobok, na dwa, trzy, cztery, i t. d. równoległoboki równe między sobą, i z drugim równoległobokiem; ponieważ wszystkie iednakowe mieć będą wysokości, i podstawy; a zatym ten pierwszy równoległobok będzie dwa, trzy, cztery, i t. d. razy większy od drugiego.

Gdyby podstawa pierwszego równoległoboku nie zamykała w sobie kilka zupełnie razy podstawy drugiego równoległoboku; naprzykład, gdyby ta pierwsza podstawa, miała w sobie 4, 5, 7, i t. d. takich części, iakich podstawa druga ma 3; możnaby tę pierwszą podstawę podzielić na 4, 5, 7. i t. d. części równych między sobą, i równych także każdey z 3. części drugiey podstawy; a zatym, iako liczby ukazuiące wielkość podstawy pierwszego równoległoboku względem podstawy drugiego, są 4, 5, 7, i t. d. i 3; tak też liczby ukazuiące wielkość pierwszego równoległoboku względem drugiego, są: 4, 5, 7, i t. d, i 3. Albo; iako podstawa pierwszego równoległoboku zamyka w sobie podstawę drugiego tyle razy, ile oznaczaią liczby ułomkowe: $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, i t. d; tak

też

też pierwszy równoległobok zamyka w sobie drugi, tyle razy, ile oznaczają te same liczby ułomkowe: $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, i t. d.

Podobnie gdy dwa Troykąty maią równe wysokości, a nierówne podstawy; ieżeli podstawa pierwszego Troykąta zawierać w sobie będzie podstawę drugiego, dwa, trzy, cztery i t. d. razy; to też powierzchnia tego pierwszego Troykąta, będzie dwa, trzy, cztery i t. d. razy większa od powierzchni drugiego. Toż mowić, gdy podstawa iednego Troykąta, zamiast zawierać w sobie kilka zupełnie razy podstawę drugiego, będzie się tylko składała z kilku takich części równych, z iakich się składa i podstawa Troykąta drugiego. Y tak ieżeli podstawy obydwóch Troykątów zamykaią w sobie, iedna 4, a druga 5, takichże równych części; te też dwa Tróykąty zamykać będą ieden 4, a drugi 5. równych między sobą Troykątów, maiących wysokość iednakową z wysokością nie podzielonych Troykątów, a za podstawę, część iednę tylko podstawy tamtych Troykątów. A zatym, iako podstawa pierwszego Troykąta iest $\frac{4}{5}$ podstawy drugiego, tak też i powierzchnia pierwszego Troykąta będzie $\frac{4}{5}$ powierzchni drugiego.

Dwa

Dwa kąty maiące swoie wierzchołki w środku tego samego koła, albo kół równych, i obeymuiące ramionami swemi łuki równe, są równe (174).

Jeżeli tedy z dwóch kątów w środku kół równych, ieden wspiera się na łuku, dwa, trzy, cztery i t. d. większym, niżeli iest ten, na którym wspiera się kąt drugi; można tamten kąt większy podzielić na dwa, trzy, cztery i t. d. kątów równych sobie i kątowi drugiemu. Toż samo mowić można, gdy dwa łuki nie zupełnie się zamykaią ieden w drugim. Y tak ieżeli ieden z tych łuków może być podzielony na 4. równe części, a drugi na 3. takież części; dwa kąty, które się wspieraią na tych łukach, mogą się podzielić, ieden na 4, a drugi na 3. kąty równe między sobą.

Toż samo przystosować można i wycinkom w kołach równych, względem łuków, które ramionami swemi też wycinki obeymuią.

W takich szczególnych razach, szukano, ilekroć dwie iakie ilości iednakowego gatunku, naprzykład dwie liniie, dwa łuki, koła, zamykały się iedna w drugiey, i znaydowano, że tylekroć i inne dwie ilości iednakowego także gatunku zamykały

kały ſię iedna w drugiey, naprzykład: dwa Rownoległoboki, dwa Troykąty, dwa wycinki i t. d.

202. *Definicye.* Gdy dwie iakie ilości do ſiebie przyrównywamy, abyśmy wiedzieli, ile razy iedna zamyka w ſobie drugą, takie przyrównywanie nazwać można ſtoſunkiem Geometrycznym (Ratio Geometrica) albo bez przydatku ſtoſunkiem tych dwoch ilości. Pierwſzy wyraz ilości, którą do drugiey ſtoſuiemy, zwać będziemy *Poprzednikiem* ſtoſunku (antecedens rationis:) Drugi zaś wyraz ilości tey, do którey przyrównywamy ilość pierwſzą, nazwiemy *Naſtępnikiem* (conſequens) ſtoſunku. To co z tego przyrownania wynika, nazwać można *Wykładnikiem* ſtoſunku (exponens rationis.) Dwa ſtoſunki nazywaią ſię równemi, gdy równemi ſą ich wykładniki.

203. *Uwaga.* Z tych ſamych Definicyi widziemy, że wyrazy ſtoſunku Geometrycznego, nie mogą być tylko iednakowego gatunku, gdyż niemożna do ſiebie przyrownywać, tylko ilości iednakowego gatunku; a ztąd dwa wyrazy ſtoſunku tego, zawſze w liczbach mieć możemy, z których iedna tyle razy zamykać w ſobie drugą będzie, ile razy ilość przyrownywać

wać się maiąca, zamyka w sobie drugą ilość tegoż gatunku, do którey ią przyrównywamy. Przeto stosowanie takie uważać można iak dzielenie, liczebne biorąc za liczbę podzielną poprzednika stosunku, za liczbę dzielącą następnika stusunku, a za wieloraz wykładnika tegoż stosunku. Wykładnik tedy iedno będzie, co ułomek, którego Licznikiem Poprzednik, a mianownikiem następnik stosunku.

204. Gdy się cztery ilości takie znayduią, że stosunek dwóch pierwszych, równy iest stosunkowi dwoch drugich; takie cztery ilości czynią *Proporcyą Geometryczną*, albo bez przydatku, *Proporcyą*; i mowiemy, że tak się ma Poprzednik pierwszego stosunku, do swego następnika, iak się ma Poprzednik drugiego stosunku do swego także Następnika. I tak, przypadki szczegulne, któreśmy za przykład wyżey przytoczyli, takby mogły być wyrażone.

Jeżeli dwa Równoległoboki iednakową maią wysokość, powierzchnia iednego z nich, tak się będzie miała do powierzchni drugiego, iak się ma podstawa pierwszego, do podstawy drugiego. Jeżeli dwa Troykąty iednakową maią wysokość, powierzchnia iednego Troykąta, tak się ma do powierzchni drugiego Troykąta, iak

się

ſię ma podſtawa pierwſzego do podſtawy drugiego.

Jeżeli dwa kąty w środku dwóch równych kół znayduią ſię; ieden z tych kątów, tak ſię mieć będzie do kąta drugiego, iak ſię ma łuk obięty od ramion pierwſzego kąta, do łuku obiętego od ramion drugiego kąta.

Jeſzcze i tak możnaby te ſame podania wyrazić: Dwa równoległoboki iednakowey wyſokości tak ſię maią do ſiebie, iak ich podſtawy.

Dwa Troykąty iednakowey wyſokości, tak ſię maią do ſiebie, iak ich podſtawy.

Dwa kąty w środku kół równych tak ſię maią do ſiebie, iak dwa łuki, na których ſię wſpieraią. Toż mówić i o wycinkach kół równych.

Na koniec ieſzcze krócey zwykły ſię czaſem wyrażać podobne podania, zamykaiąc całą proporcyą w dwóch tylko na oko wyrazach, i to ieſzcze znaczących ilości odmiennego gatunku. *Wiele na tym zawiſło, aby Uczniowie znali ſię dobrze na takowych wyrazach częſto używanych.*

Mowi

Mówi się na przykład, że powierzchnia równoległoboku, którego wysokość iest *iednostayna* (constans) proporcyonalną iest do swoiey podstawy.

Tu się opuszcza wyraz drugiego równoległoboku, który także wchodzi w porównanie, i iego podstawy; ale się wyrázów tych domyślać trzeba. Dla tego się zaś opuszczaią, że ten drugi równoległobok równey z pierwszym wysokości być mniemamy, i iednostayney, to iest nieodmienney podstawy, a zatym i powierzchni. Będzie tedy pierwszy równoległobok tym większy albo mnieyszy względem drugiego równoległoboku opuszczonego, im podstawa pierwszego większa lub mnieysza iest od podstawy drugiego. Tak, niech pierwszy równoległobok ma wysokości 3. łokcie, równie iak i drugi; ieżeli ten drugi równoległobok mieć będzie podstawę łokci 4, zawsze iednostayną i nie odmienną, a zatym i iednostayną powierzchnią 12. łokci kwadratowych; pierwszy równoległobok tym większy lub mnieyszy będzie od drugiego to iest, tym większą lub mnieyszą mieć będzie powierzchnią od drugiego, im większą lub mnieyszą damy mu podstawę od drugiego. Dawszy mu naprzykład podstawy 8. łokci, będzie powierzchnia iego 24 łokci

łki kwadratowych, dwa razy większa od powierzchni drugiego równoległoboku; dawszy mu podstawy 2. łokci, będzie powierzchnia iego 6. łokci kwadratowych, dwa razy mnieysza od powierzchni tegoż równoległoboku, i t. d. Gdy tedy ten pierwszy równoległobok, albo powierzchnia iego, tyle się tylko powiększa lub pomnieysza względem powierzchni drugiego równoległoboku, ile się powiększy lub pomnieyszy podstawa iego względem podstawy drugiey iednostayney, dosyć iest więc powiedzieć w takim razie, że powierzchnia tego równoległoboku, którego wysokość iednostayna, proporcyonalną iest do swoiey podstawy; to iest gdy podstawa dwa razy naprzykład większa będzie, powierzchnia też większa będzie dwa razy; gdy tamta dwa razy mnieysza, to i ta, i t. d.

205. Niech będą cztery ilości oznaczone przez A,B,C,D, które do siebie stosować można; zgodzono się, aby stosunek ten wyrazić kształtem następuiącym A:B = C:D; co tak się wymawia: A. tak się ma do B, iak się ma C. do D. Dwa punkta umieszczone między dwoma wyrazami każdego w szczególności stosunku, znakiem są dzielenia iednego wyrazu przez drugi; dwie zaś linije w pośrodku znaczą równości dwóch stosunków,

206

206. *Wnioski.* Z tych *zasad* (principium) któreśmy o proporcyach założyli, wynikaią następuiące podania.

1. Jeżeli dwa stosunki są równe trzeciemu; równe też i sobie będą.

2. Jeżeli w dwoch Proporcyach trzy pierwsze wyrazy w iedney, równe są trzem pierwszym wyrazom w drugiey; to i czwarte wyrazy równe też będą.

3. Stosunek między dwiema ilościami tenże sam iest, co i między temiż ilościami podwoionemi, potroionemi i t. d. Tak naprzykład 4 ma się do 2, iak 8. do 4, albo iak 12 do 6. i t. d. Ztąd wynika, że można podzielić, albo rozmnożyć przez iednakową liczbę dwa pierwsze lub dwa ostatnie wyrazy Proporcyi, nie naruszaiąc przeto proporcyi między temiż czterema wyrazami.

4. Można także podwoić, potroić, i t. d. obadwa Poprzedniki, albo obadwa Następniki; a proporcya wszelako będzie zachowana. W pierwszym razie wykładnik stosunków, stanie się dwa, trzy i t. d. razy większym niż był z początku; w drugim zaś razie będzie tylko połową, trzecią częścią, i t. d. Wykładnika pierwszego.

5 W tey-

5. W teyże ſamey proporcyi, można odmienić mieyſce obydwom Poprzednikom; to ieſt: położyć tam Poprzedniki, gdzie były Naſtępniki, a Naſtępniki tam, gdzie były Poprzedniki; równość iednak i po tey odmianie zachowana będzie między dwoma ſtoſunkami teyże proporcyi. Y tak naprzykład w tey Proporcyi: 4: 2 = 12: 6, można odmienić położenie Poprzedników: 4 i 12 i napiſać: 2: 4 = 6: 12, wſzelako iednak zachowa ſię Proporcya; bo iako w pierwſzey proporcyi wykładniki ſtoſunków obydwóch: 4: 2, i 12: 6, były równe; to ieſt tak, 4 przez 2, iak 12 przez 6, podzielone dawały na wykładnika, albo na wieloraz, 2; tak i w drugiey proporcyi, wykładniki ſtoſunków 2: 4, i 6: 12 ſą równe; to ieſt tak 2, przez 4, iak i 6 przez 12 podzielone, daią na Wykładnika, albo na wieloraz iednakowy ułomek: $\frac{1}{2}$. Toż mowić i o podobney odmianie w iakieykolwiek inney Proporcyi; co tak można ogolnie przez litery wyrazić:

Jeżeli A: B = C: D.

to też i B: A = D: C

6. W proporcyi każdey można powiedzieć, że ſumma, albo różnica dwóch pierwſzych wyrazów, tak ſię ma do iednego

go z tych dwóch wyrazów, iak ſię ma ſumma albo różnica dwóch drugich wyrazów, do iednego z tychże wyrazów. Naprzykład ieżeli 4: 2 = 12: 6, to też będzie 6: 2 = 18: 6, albo 6: 4 = 18: 12, albo 2: 4 = 6: 12.

Jakoż ieżeli każdą Poprzednika i Naſtępnika ſummę lub różnicę ſtoſuiemy do naſtępnika iey właſnego; Wykładnik każdego w ſzczególności ſtoſowania powiększy ſię lub pomnieyſzy iednością, a zatym równy będzie w obydwóch ſtoſunkach i potakiey odmianie.

Jeżeli zaś każdą Poprzednika i Naſtępnika ſummę lub różnicę ſtoſuiemy do Poprzednika iey właſnego, iedno czyniemy, iak gdybyśmy pierwey poprzednika każdego za Naſtępnika położyli, a potym dopiero, ſummę lub różnicę ich ſtoſowali do naſtępników, tak iak wyżey; a zatym tąż częścią pomnoży ſię lub zmnieyſzy wykładnik pierwſzego ſtoſunku, iak i drugiego.

Wyrażenia literalne tegoż ſamego.

Jeżeli A: B = C: D.

to też A + B: B = C + D: D

A — B: B = C — D: D

A + B: A = C + D: C

A — B: A = C — D: C.

Gdyby Następniki większe były od swoich Poprzedników, naprzykład B od A, i D od C; tę proporcyą A: B = C: D można-by w tę zamienić B: A = D: C. a zatym.

B — A: A = D — C: C

B — A: B = D — C: D.

7. Gdy w Proporcyi, cztery wyrazy iednego są gatunku; to iest, gdy wszystkie znaczą *n. p.* liniie, lub powierzchnie i t. d: można powiedzieć że summa dwóch Poprzedników, tak się ma do summy dwóch Następników, iak się ma którykolwiek poprzednik do swego następnika.

Jakoż, ieżeli ieden Poprzednik zamyka naprzykład dwa, trzy i t. d. razy swego Następnika, i drugi też Poprzednik, tyle razy następnika swego zamykać w sobie będzie; a zatym i summa Poprzedników, tyle też razy zamykać będzie summę następników. Przeto summa Poprzedników tak się mieć będzie do summy następników, iak każdy w szczególności Poprzednik do swego Następnika. To samo rozumowanie przystosować można do różnicy dwóch Poprzedników i do różnicy, dwóch następników; i do więcey iak dwóch równych stosunków.

Wszystkie te odmiany na wielu przykładach liczebnych obiaśnić należy.

207. *Uwaga.* Dadzą poznać Nauczyciele Uczniom swoim, że *Reguła trzech*, iest pewnym gatunkiem proporcyi, w którey z trzech wyrazow znaiomych, szukamy czwartego nieznaiomego, co samo na przykładach iakich rachunkowych pokazać trzeba. Mnożenie nawet i dzielenie, do proporcyi przyrównać można; bo w mnożeniu, liczby, mnożna, i mnożąca się średniemi wyrazami proporcyi, iedność, iest pierwszym wyrazem proporcyi, a liczba rozmnożona iest ostatnim wyrazem. Y tak naprzykład: $4 \times 3 = 12$. rozłożyć można na proporcyą następuiącą $1 : 4 = 3 : 12$. W dzieleniu zaś, liczba dzieląca i wieloraz są średniemi wyrazami proporcyi; iedność iest wyrazem pierwszym, a liczba podzielna iest ostatnim wyrazem. Y tak naprzykład $\frac{8}{4} = 2$ albo $8 : 4 = 2$, rozłożyć można na proporcyą następuiącą $1 : 4 = 2 : 8$. Więcey ieszcze takowych przykładów podać nie zawadzi.

208. *Twierdzenie* 1. *fundamentalne.* Gdy w Troykącie iakimkolwiek bokiieden przedłużaiąc go powiększemy, dwa, trzy, cztery, pięć i t. d. razy, i przez końce takie-

takiego przedłużenia poprowadziemy równoległe od boku drugiego aż do boku trzeciego także przedłużonego; zrobią-fię tym ſpoſobem Troykąty, których i inne dwa boki większe też będą od boków pierwſzego Troykąta, dwa, trzy, cztery, pięć i t. d. razy.

Niech naprzykład będzie Troykąt ABC, *Fig.* 4
którego bok AB, tak przedłużyliſmy, aby liniia AD, dwa razy była większa od AB. Przez D. poprowadziwſzy DH równoległą od BC; Liniia DH. dwa razy też większa będzie od linii BC, a liniia AH dwa razy większa od linii AC.

Wykreślenie. Przez punkt C. popowadźmy CN równoległą od AB, któraby ſpotkoła w punkcie N, linią DH.

Dowodz. Czworokąt BDNC, ieſt równoległobokiem; więc boki w nim przeciwne ſą równe; to ieſt BC = DN a BD = CN: a że BD = AB, więc i CN = AB. Kąty iednoſtronne A, i NCH ſą równe iako też i kąty iednoſtronne ACB, AHD; a zatym Troyką y ACB, CHN dla równości kątów wſzyſtkich i boków AB, CN równych, mogą przyſtać do ſiebie, i będzie AC = CH, a tym ſamym AH = 2 AC, to ieſt liniia AH dwa raży większa od AC. Jeſt też i BC = NH, a tym ſamym DH = 2 BC,

2 BC, to ieſt liniia DH dwa razy większa od BC. Weźmy znowu Liniią AE trzy razy większą od AB, i poprowadźmy EI równoległą od BC. Podobnie iak wyżey dowieść będzie można, że też liniia EI trzy razy ieſt większa od BC, a AI trzy razy większa od AC, co ſię łatwo okaże pociągnąwſzy liniią HO równoległą od AE; bo dla równości kątów wſzyſtkich, i boków AB, HO, Troykąty ABC, HOI przyſtaną do ſiebie, a zatym AC = HI, i BC = OI. Aże EO = DH, a DH = 2 BC = 2 OI, więc EO = 2 BC, a zatym EI = 3 BC. Tak też i AI = AH + HI = 2 AC + HI = 3 HI.

Tymże ſpoſobem dowodzi ſię, że ieżeli liniia AF, cztery razy będzie większa od linii AB; Liniia też FL równo odległa od BC, cztery razy od niey większa będzie, i liniia AL, cztery także razy większa od AC. i t. d.

209. *Zagadn.* 1. Podzielić daną linią na ilekolwiek części równych.

Niech naprzykład będzie liniia dana AG, którą podzielić mamy na 5. części równych.

Rozwiązanie. Od końca iednego naprzykład A, linii daney AG, prowadzę drugą

drugą liniią AM, iakieykolwiek długości, czyniącą z linią daną, kąt iaki mi się podoba. Od A ku M, biorę tyle części równych na linii AM, na ile ich ma być podzielona liniia AG; tu naprzykład biorę 5. części równych. Punkt M. Linii AM, gdzie się ostatnia część podziału kończy, łączę liniią MG z punktem G Linii daney AG. Przez inne podzielone punkta: L, I, H, C, prowadzę równoodległe od linii M G, do linii AG. Te równoodległe: LF, IE, HD, CB, wraz z liniią MG przecinać będą liniią daną AG w punktach podziału żądanego.

Podobnym sposobem postąpić sobie trzeba, gdy na więcey lub mniey części podzielić przypadnie liniią daną.

Dla większey łatwości, w prowadzeniu równoodległych, można użyć następuiącego sposobu, zwłaszcza gdy na wiele równych części przypada dzielić liniią daną.

Chcąc naprzykład podzielić liniią AB na 5. równych części, prowadzę od końca iey iednego A linią AC pod iakimkolwiek kątem, i od drugiego końca B, prowadzę liniią BD, od pierwszey równoodległą. Dzielę od punktu A liniią AC, na pięć iakichkolwiek równych części i *Fig.* 5.

na

na takież pięć równych części od punktu B, dzielę liniią BD. Punkta podziałów równych w obydwóch liniiach, łączę tyląż równoodległemi; te przerną liniią daną AB w punktach podziału żądanego.

Dowodzenie tego nie różni się od poprzedzaiącego, gdyż w równoległoboku ACBD, uważać można ieden tylko Troykąt, BAC, lub ABD; a zatym równość części, Linii AB, podobnie się, iak w pierwszym Twierdzeniu, dowiedzie. (p)

210 *Twierdz.* 2. Dwa Troykąty równokątne, maią proporcyonalne boki przeciwne kątom równym.

Niech

(p) *Rozwiązuiąc tymże podobne Zagadnienia, niechay nie przestaią Uczniowie na Figurze podaney, ale niech sami kreślą sobie podobną Figurę, i na niey rozwiązuią Zagadnienie. Figura podana niech im tylko służy do łatwieyszego w czytaniu zrozumienia Propozycyi, którą gdy iuż dobrze zrozumieią, niechay zamknąwszy nawet książkę, na Figurze osobney od nich nakreśloney pokażą Nauczycielom, że to, co czytali, dokładnie zrozumieli, i umieią się dobrze wytłumaczyć.*

Niech będą dwa Troykąty AGM, i abc, *Fig.4 i 6.* w których kąty A i a, G i b, M i c są równe. Niech naprzykład bok AG. będzie pięć razy większy od boku ab; będzie też i bok AM, pięć razy większy od boku ac, i bok GM, pięć razy także większy od boku bc.

Jakoż odciąwszy Liniią AB, równą linii ab, i AC równą ac, i pociągnąwszy liniią BC, Troykąty ABC, abc, będą mogły przystać do siebie, a wszczególności kąty B i b, C i c będą równe. A że też kąty G i b, M i c, są równe, więc równe także są i kąty G i B, M i C; azatym liniie BC, GM będą równoodległe. Przeto według pierwszego Twierdzenia, ieżeli AG iest pięć razy większa od AB, czyli od ab, będzie też i AM pięć razy większa od AC, czyli od ac, i GM pięć razy większa od BC czyli od bc. Toż samo mówićby się mogło, gdyby dwa boki Troykątów, przeciwne równym kątom nie pięć, ale mniey lub więcey zupełnych razy, w sobie się zamykały.

Gdyby zaś dwa boki w dwóch Troykątach, przeciwne kątom rownym, nie zamykały się zupełnie ieden w drugim, ale ieden naprzykład z tych boków miał w sobie 7. takich równych części, iakich dru-

drugi ma tylko 3; w takim razie inne też boki równym kątom przeciwne, w tychże Troykątach nie zamykałyby się zupełnie ieden w drugim, albieden składałby się z 7, takich części, z iakich 3, składa się drugi. Tak na Figurze 7, gdzie Troykąty ABC, abc są równokątne, i bokom AB, ab, taka długość dana, żeby bok AB, zamykał w sobie 7, części równych linii AD, a bok ad, takież miał 3 tylko części równe linii AD, albo ad; w tych Troykątach poprowadziwszy liniie DE, de, równoodległe od BC, bc; boki AC i ac, mieć też będą pierwszy 7, drugi 3, części równe liniii AE, albo ae, a boki BC i bc, zamykać także będą pierwszy 7, a drugi 3, części równe linii DE, albo de. Toż mówić, gdyby boki dwóch Troykątów, przeciwwne kątom równym, więcey lub mniey części równych w sobie zamykały.

211. *Przestroga.* W dwóch Troykątach równokątnych, których boki porównywać z sobą mamy, dobrze iest wierzchołki kątow równych, naznaczać podobnemi literami, naprzykład, gdy nad wierzchołkiem kąta w iednym Troykącie napiszemy litere A, napiszmy i nad wierzchołkiem kąta równego pierwszemu w drugim Troykącie, literę a; gdy nad drugim kątem, w pierwszym Troykącie będzie

dzie B, niech i nad drugim kątem równym tamtemu w drugim Troykącie będzie b, i t. d. Tym ſpoſobem i boki przeciwne równym kątom w obydwóch Troykątach, będą podobnemi też literami naznaczone; a zatym gdy w Proporcyi weźmiemy naprzykład boki AB, ab, za Poprzedniki ſtoſunku, za Naſtępniki wziąść będzie potrzeba boki AC, ac, albo BC, bc; i dla tego wſzyſtkie te proporcye będą dobre; AB : ab = AC : ac. AB : ab = BC : bc, albo AC : ac = AB : ab. BC : bc = AB: ab; albo, AC : ac = BC : bc, albo BC: bc = AC: ac.

212. *Twierdz:* 3. Jeżeli we dwóch Troykątach, kąty dwa którekolwiek ſą równe, i boki dwa około każdego z tych kątów proporcyonalne; takie Troykąty będą równokątne.

Niech będą dwa Troykąty ABC, abc, i w tych kąty A i a równe, boki zaś AB, ab, i AC, ac, około tych kątów proporcyonalne; to ieſt niech ſię ma tak AB do ab, iak AC do ac, czyli AB: ab = AC: ac. W takim razie będą też równe kąty B, b, i kąty C, c, a zatym i ſtoſunek boków BC, bc, będzie ten ſam co i boków AB, ab, albo AC, ac,

Wy-

Tab. XII Fig. 1 *Wykreślenie.* Na boku AB, weźmy linią AD. równą ab, i poprowadźmy DE równoodległą od BC, i ſpotykaiącą AC w Punkcie E

Dowodz. Troykąty ABC, ADE, ſą równokątne; więc (iako ſię w drugim Twierdzeniu dowiodło) AB: AD (albo ab) = AC: AE. Aże AB: ab = AC: ac. więc AE = ac; a zatym Troykąty ADE, abc mogą przyſtać do ſiebie; że zaś Troykąty ABC, ADE, ſą równokątne, więc równokątne także będą i Troykąty ABC, abc, a zatym, AB: ab = BC: bc.

213. *Twierdz.* 4. Jeżeli w dwóch Troykątach, trzy boki w iednym ſą proporcyonalne względem trzech boków w drugim, takie Troykąty będą równokątne.

Niech będą dwa Troykąty, ABC, abc, i boki w nich proporcyonalne, tak, że AB: ab = AC: ac, i AB: ab = BC: bc, te dwa Troykąty ſą równokątne.

Wykreślenie. Weźmy liniią AD równą linii ab, i poprowadźmy DE równoodległą od BC.

Dowodz. Troykąty ABC, ADE ſą równokątne, więc AB: AD (albo ab) = AC: AE.

[Aże

Aże też ieſt AB : ab. = AC : ac

więc - - - AE = ac

Podobnie AB:AD (albo ab) = BC: DE

Aże też ieſt, AB: - - ab = BC: bc

Więc - - - DE = bc

A zatym dwa Troykąty ADE, abc wſzyſtkie trzy boki maią ſobie równe, i dlatego mogą przyſtać do ſiebie, i ſą równokątne. Aże też ſą równokątne i Troykąty ABC, ADE, więc równokątne także będą Troykąty ABC, abc.

214. *Twierdz.* 5. Niech będą dwa Troykąty maiące kąt ieden proſty, roſtwarty, lub oſtry równy w obydwóch Tróykątach, i niech ſtoſunek ramion przy tych kątach będzie równy ſtoſunkowi boków przeciwnych tymże kątom. Te dwa Troykąty będą równokątne, byleby w trzecim przypadku, boki przeciwne kątowi oſtremu większe były w obydwóch Tróykątach, niżeli ramiona po iedney lub po drugiey ſtronie przyległe temuż kątowi; albo chociaż te boki przeciwne mnieyſze będą od ramion, byleby inny kąt w obydwóch Troykątach był roſtwarty

ſtwarty, lub oſtry, który iedno ramie, ma ſpolne z katem pierwſzym, równym w obydwóch Troykatach. Niechby naprzykład były dwa Troykąty ABC, abc, w których kąty A i a, równe, i ſtoſunek ramienia AC do ac, taki iaki boku BC, do bc. Te dwa Troykąty będą równokątne.

Fig. 2. 1. Gdy kąty A i a, obadwa ſą proſte.

Fig. 3. 2. Gdy kąty A i a obadwa ſą roſtwarte.

Fig. 4. *y* 5. 3. Gdy kąty A i a obadwa ſą oſtre, ale boki BC, bc. większe od ramion AC, ac.

4. Gdy kąty A i a obadwa ſą oſtre ale boki BC, bc, mnieyſze od ramion AC. ac; i kąty B i b, obadwa oſtre, Fig. 4. albo obadwa roztwarte Fig. 5.

Wykreślenie powſzechne. Weźmy Linią AD, równą ac, i poprowadźmy DE równoodległą od BC.

Dowodz. Troykąty ACB, ADE ſą równokątne;

Więc AC: AD (albo ac) = BC: DE

Ale też ieſt AC: ac = BC: bc

więc DE = bc

A za-

A zatym dwa Troykąty ADE, acb mogą przyſtać do ſiebie, i ſą równokątne; aże też i Troykąty ACB, ADE ſą równokątne, więc równokątne także będą i Troykąty ACB, acb. (q)

215 *Def.* Gdy w dwóch Figurach proſtokreślnych równe ſię kąty wſzyſtkie znayduią iedne względem drugich, i boki około tych kątów proporcyonalne, takie Figury nazywaią ſię *podobnemi* (Figuræ ſimiles.)

216. *Uwaga.* Po przytoczonych dowodzeniach Twierdzeń poprzedzaiących iaśnie ſię pokazuie, że równość kątów w dwóch Troykątach, pociąga za ſobą proporcyonalność ich boków, i wzaiemnie proporcyonalność boków w dwóch Troykątach wywodzi równość kątów w tychże Troykątach. W innych zaś Figurach proſtokreślnych, które z więcey niż trzech boków ſą złożone, nie można z rów-

(q) *Dla ſkrócenia, różne te przypadki w iednym powſzechnym zamknęło ſię dowodzeniu; lepiey iednak będzie każdego z oſobna przypadku oſobno uczniom dowodzić, aby wielu razem okoliczności wyſtawieniem, baczność ich nie była rozſarguiona.*

równości kątów we dwóch takich wielokątach, wnosić proporcyonalność ich boków, ani wzaiemnie z proporcyonalności boków, wnosić równość kątów. Y tak kwadrat prostokątny, z kwadratem u kośnym, lubo maią boki proporcyonalne, nie maią iednak kątów równych. Dwa znowu prostokąty, nie różnią się między sobą, co do kątów, a iednak boki ich mogą być nierówne i całe nieproporcyonalne.

Trzeba iak nayiaśniey i naydokładniey wyłożyć Uczniom te trzy rzeczy, to iest: *Przystawanie*, *Równość* i *Podobieństwo* Figur.

Równość dwóch naprzykład Figur, ściąga się tylko do ich wielkości, nie zaś do ułożenia ich boków, albo granic w których się zamykaią. I tak dwa Troykąty, które, równe podstawy maią, i wysokości są sobie równe lubo ich boki, nie iednakowo mogą być ułożone, i większe iedne lub mnieysze od drugich. Dla tego też można znaleść Troykąt, lub kwadrat, równy Figurze prostokreśney daney, iakąkolwiek liczba iey boków będzie, i tychże boków ułożenie.

Podobieństwo ściąga się tylko do samey Figury czyli ułożenia boków, nie zaś do wiel-

wielkości. Dwie Figury, naprzykład dwa Troykąty mogą być do siebie podobne, lubo ieden będzie nader wielki, a drugi nader mały. Lecz aby Figury były podobne, trzeba 1mo. Aby miały iednakową liczbę boków. 2do. Aby kąty w iedney Figurze były równe kątom w drugiey. 3tio. Aby *boki odpowiadaiące* (latera correspondentia:) to iest te, które zamykaią w sobie kąty równe, były proporcyonalne. I tak dwa kwadraty zawsze są podobne ieden do drugiego, chociażby naprzykład bok iednego był na mile długi, a drugiego tylko na łokieć, lub na cal.

Przystawanie zamyka w sobie razem równość i podobieństwo. Dwie Figury aby przystać do siebie mogły, trzeba, aby się w niczym nie rożniły, tylko w tym, że na odmiennych mieyscach są nakreślone. (r)

(r) *Przetrząsnowszy Twierdzenia ściągaiące się do równości, i do podobieństwa Troykątów, łatwo postrzeżemy, że dowodzenia tam przytoczone zupełnie się zasadzaią na tych, któreśmy dawali mowiąc o przystawaniu Troykątów. Wiele na tym zawisło, aby często przypominać Uczniom sposob postępowania,*

Tab. XIII. Fig. 1

217. *Twierdz.* 6. Jeżeli dwie iakiekolwiek Figury proſtokreślne ſą podobne, i w każdey z nich przez wierzchołki kątów równych, poprowadziemy do drugich kątów, tyle przekątnych, ile ich poprowadzić można; wſzyſtkie te Troykąty, na które iednę Figurę podzielemy, będą podobne Troykątom w drugiey Figurze.

Przykład. Niech będą dwa Pięciokąty ABCDE, abcde, podobne do ſiebie; od wierzchołków A, i a, dwóch kątów równych, poprowadziwſzy przekątne, AC, AD, ac, ad; Troykąty, ABC, ACD ADE, będą podobne Troykątom, abc, acd, ade.

Dowodz. Ponieważ te Pięciokąty ſą do ſiebie podobne, kąty w nich B i b, będą równe, i boki około tych kątów proporcyonalne; dwa więc Troykąty ABC, abc, ſą do ſiebie podobne, iako maiące kąty B i b, równe, i boki około nich proporcyonalne, a wſzczególności kąt ACB, równy ieſt kątowi acb; a że też równe ſą dane kąty, BCD, bcd, więc i kąty ACD, acd, równe będą. Boki także AC, ac, ſą między ſobą iak boki AB, ab, albo BC,

---

który prowadzi od wyobrażeń proſcieyſzych, do tych, które bardziey ſą zawikłane.

BC, bc. Aże tak boki AB, ab, iak i boki, BC, bc, ſą w proporcyi z bokami DC, dc, więc i boki AC, ac. ſą proporcyonalne bokom DC, dc; a zatym i Troykąty ACD, acd, będą podobne maiąc, kąty C i c równe, i boki około nich AC, DC; ac, dc. proporcyonalne; a wſzczegulności kąty, ADC, adc, będą równe. Aże znowu i kąty E, e, ſą równe, więc i Troykąty ADE, ade, będą względem ſiebie równokątne; a zatym podobne.

218. *Uwaga* 1. Dla dowiedzenia, że Troykąty ADE, ade. ſą podobne, nie trzeba było używać koniecznie proporcyonalności boków AE. ae, DE, de, można nawet było i nie pokazywać wyraźnie równości kątów E, e. z ſamego wykreślenia; ponieważ kątów EDA, eda, EAD, ead, mogła być równość okazana, z równości iuż dowiedzioney kątów ADC, adc, DAC, dac, CAB, cab, w innych Troykątach; a tym ſamym równość kątów E, e wydałaby ſię, a zatym i podobieńſtwo Troykątów AD E, ade, byłoby dowiedzione.

219. *Uwaga.* 2. Wiele na tym zawiſło, aby to dać poſtrzedz Uczniom, że gdy we dwóch Figurach podobnych złączone będą przekątnemi wierzchołki dwóch kątów

tów odpowiadaiących sobie, te przekątne mieć będą iednostayne stosunki, z bokami tych dwóch Figur; a za tym gdy w podobnych Figurach końce dwóch boków odpowiadaiących sobie złączemy przez przekątne; Troykąty złożone z tych przekątnych i z dwóch boków należących do tych Figur, będą do siebie podobne.

220. *Zagadn.* 1. Maiąc dane trzy liniie proste, na trzy pierwsze wyrazy proporcyi, znaleść liniią czwartą proporcyonalną.

Wykreślenie. Zróbmy kąt iakikolwiek. Na dwa ramiona tego kąta, przenieśmy od wierzchołka iego dwie dane liniie, maiące służyć za dwa pierwsze wyrazy proporcyi. Końce tych dwóch liniy złączmy trzecią liniią. Przenieśmy ieszcze podobnym sposobem i trzecią daną liniią, na to ramie, na które iuż iest przeniesiona pierwsza liniia proporcyi. Od końca tey trzeciey linii, poprowadźmy aż do drugiego ramienia liniią równoodległą od tey, która złączyła końce dwóch pierwszych linii. Liniia zawarta między wierzchołkiem kąta i punktem, w którym ostatnia równoodległa przecina ramie

mie drugie, będzie czwartą liniią proporcyonalną, którey ſzukaliśmy. (s)

221. *Zagadn.* 2. Maiąc daną linią proſtą, tak ią przeciąć, aby dwa iey odcinki tak ſię do ſiebie ſtoſowały, iak ſię ſtoſuią dwie inne dane liniie.

Wykreślenie. Od końca iednego linii daney do przecięcia, poprowadźmy pod iakimkolwiek kątem liniią równą iedney z tych dwóch, których dany ieſt ſtoſunek, a od drugiego końca, w ſtronę przeciwną, poprowadźmy równoodległą od pierwſzey, równą drugiey linii, którey także dany ieſt ſtoſunek.

Złączmy końce tych dwóch linii w przeciwne ſtrony poprowadzonych, liniią trzecią, ta przetnie liniią daną w punkcie, którego ſzukaliśmy.

Albo

(s) *Co w Arytmetyce znaczy* Reguła trzech, *to znaczy w Geometryi Zagadnienie, aby trzy maiąc dane Liniie proſte, znaleść czwartą proporcyonalną. Jeſt to w ſamey rzeczy Reguła trzech wykonana na liniach.*

Albo tak. Od końca linii daney do przecięcia, poprowadźmy linią, któraba z nią czyniła kąt iakikolwiek. Na tę drugą liniią, od wierzchołka kąta, przenieśmy iednę z tych linii, których dany iest ſtoſunek; i od końca znowu tey oſtatniey linii pociągniymy drugą liniią, równą drugiey, którey także dany iest ſtoſunek. Koniec iey złączmy z końcem linii daney do przecięcia; a od tego punktu, gdzie ſię pierwſza kończyła, a ta druga zaczynała, poprowadźmy równoodległą, która przetnie liniią daną do przecięcia, w punkcie żądanym.

Ten oſtatni ſpoſob poſtępowania, może być przyſtoſowanym i w innych razach, gdzieby liniią daną na więcey części przeciąć potrzeba, naprzykład na 3, 4. 5. i t. d które takby ſię miały do ſiebie, iak ſię maią 3, 4, 5, i t. d. linii danych. (t)

222. *Zagadn.* 3. Przedłużyć liniią daną, tak, aby ſumma z tey linii i z iey przedłużenia tak ſię miała do ſamego przedłużenia, iak ſię maią do ſiebie dwie inne

(t) *Takie zagadnienie iest tym ſamym w Geometryi, czym iest w Arytmetyce* Reguła ſpołki.

inne liniie dane; czyli, znaleść dwie liniie, których dana ieſt różnica i ſtoſunek.

Wykreślenie. Od obydwóch końców linii daney, poprowadźmy w iednę ſtronę dwie liniie równoodległe, i równe dwom liniiom, których dany ieſt ſtoſunek. Przez końce tych równoodległych, przeciągniymy linią tak daleko, aż ſię ſpotka z przedłużeniem linii daney. Punkt ten ſpotkania, wyznaczy długość przedłużenia linii daney; i odległość iego od dwóch końców teyże linii, będzie wymiarem długości dwóch linii, których ſzukaliśmy.

223. *Zagadn.* 4. Maiąc dany Troykąt, i liniią oſobną, wyſtawić na tey linii Troykąt podobny danemu.

Spoſob 1. Dwom bokom Troykąta danego, i trzeciey Linii daney, ſzukam czwartey proporcyonalney, i mieć będę dwa boki Troykąta, którego ſzukam, w proporcyi z dwoma bokami Troykąta danego. Tymże ſpoſobem znaydę i trzeci bok Troykąta, który ma być podobny Troykątowi danemu.

Spoſob 2. Od dwóch końców linii daney, prowadzę po iedney ſtronie dwie liniie,

liniie, czyniące z nią dwa kąty równe dwom kątom Troykąta danego; te dwie liniie zeyściem się z sobą, zrobią z daną liniią Troykąt podobny danemu.

Sposob 3. Liniią daną przenoszę na bok którykolwiek Troykąta danego, tak, aby koniec ieden tey linii był na wierzchołku kąta, a drugi tam, gdzie przypadnie, lub na samym boku Troykąta, lub za nim, gdy liniia dana dłuższa będzie od boku Troykąta. Z końca tego drugiego, Linii daney prowadzę równoodległą od boku Troykąta przeciwnego kątowi, od którego pierwszą liniią ciągnąłem, i tak daleko ią prowadzę, aż się zniydzie z trzecim bokiem troykąta danego, przedłużonym, gdy tego będzie potrzeba. Zrobi się tym sposobem Troykąt podobny danemu, i maiący za podstawę, liniią równą daney, który to Troykąt przerysować potym mogę na symey linii daney. (u)

224. *Zagadn.* 5. Na daney linii wykreślić iakąkolwiek Figurę prostokreślną podobną Figurze daney.

Roz-

---

[u] *Częste tego zagadnienia używanie, było pobudką do podanie kilku sposobów, któremi być może rozwiązane.*

Rozwiąz. Na daney Figurze od końca boku któregokolwiek. prowadzę tyle przekątnych do innych kątów, ile można, i dzielę tak Figurę daną na Troykąty. Potym na linii daney wykreślam po iedney stronie sposobem wyżey opisanym, tyle Troykątów podobnych, ile ich iest w Figurze daney. Wierzchołki tych Troykątów, będą wierzchołkami kątów Figury, którey szukałem.

225. *Uwaga.* Między innemi sposobami rozwiązania tego Zagadnienia, sposob podany zdaie się naylepszym; a to dla tego, że używaiąc go, uchybienia, które popełnić można w położeniu linii, czyli boków Figury, nie zawisły iedne od drugich; i można uchybić w położeniu iedney linii, a nie uchybić tym samym, w położeniu drugiey; na co osobliwszą baczność koniecznie mieć potrzeba.

226. *Podanie przybrane.* (Lemma). W Troykącie prostokątnym, gdy spuścimy prostopadłą, od wierzchołka kąta prostego; ta prostopadła podzieli Troykąt na dwa inne z pierwszym równokątne, a zatym i równokątne między sobą.

Niech będzie Troykąt ABC prostokątny w C zkąd spuszczona iest prostopadła *Fig.* 2.

CD

CD na przeciw proſtkątną AB; Troykąty trzy: ABC, ACD, CBD ſą względem ſiebie równokątne.

Dowodz: Troykąty ABC, ACD, maią kąt ſpolny A, i kąty ACB, ADC proſte, a zatym równe; trzeci przeto kąt w iednym, będzie też równy trzeciemu kątowi w drugim. Są więc obadwa te Troykąty, równokątne. Podobnie i Troykąty proſtokątne ABC, CBD maią kąt ſpolny B, i ſą także równokątne.

W Troykątach równokątnych ABC, ACD, mamy proporcyą: AB: AC = AC: AD. w Troykątach: ABC, CBD będzie; AB: BC = BC: BD; a w Troykątach ADC, CDB; AD: DC = DC: BD. w Troykątach, ABC, ACD, ieſt też i ta proporcya: AB: BC = AC: CD.

To ieſt 1. W Troykącie proſtokątnym, bok ieden ieſt średnim Geometrycznie proporcyonalnym, między przeciw proſtkątną y odcinkiem mu przyległym, który czyni proſtopadła.

2. Wyſokość Troykąta proſtokątnego, ieſt średnią Geometrycznie proporcyonalną, między dwoma odcinkami przeciw-proſtkątney,

3.

3. Przeciw proſtkątna, dwa boki, i wyſokość Troykąta poſtokątnego, ſą w proporcyi.

227. *Zagadn: 6.* Między dwiema danemi liniiami, znaleść średnią Geometryczną.

Spoſob 1. Złączywſzy z ſobą dwie dane liniie, w iednę liniią proſtą; na niey iako na średnicy nakreślmy połkole, i od punktu złączenia tych dwóch linii, wynieśmy proſtopadłą aż do okrągu połkola. Ta proſtopadła będzie średnią proporcyonalną, którey ſzukamy.

Spoſob 2. Na większey z dwóch danych linii, iako na średnicy nakreślmy połkole. Na tę ſamę średnicę, od końca iey iednego, przenieśmy drugą mnieyſzą liniią daną, a od tego punktu, gdzie ſię na średnicy konczyć będzie, wynieśmy proſtopadłą, aż do okrągu połkola, i punkt zeyścia ſię z połkolem złączmy liniią z punktem tym średnicy, od którego przeniesiona była liniia mnieyſza dana. Ta liniia łącząca te dwa punkta, będzie średnią proporcyonalną, którey ſzukamy.

RO-

ROZDZIAŁ. IX.

O ſtoſunkach powierzchni Figur proſtokreślnych, w ogulności, a w ſzczegulności o ſtoſunkach Figur podobnych.

228. *Wierdz.* 1. Gddy cztery liniie ſą w proporcyi Geometrycznéy: proſtokąt z dwóch ſkraynych, równy ieſt proſtokątowi z dwóch średnich.

To Twierdzenie trzeba nayprzod obiaśnić na liczbach, ieżeli cztery liczby ſą Geometrycznie proporcyonalne, dwie ſkrayne rozmnożone iedna przez drugą, równe będą dwom średnim podobnie rozmnożonym. W każdey albowiem proporcyi Geometrycznéy równość zachodzi między dwoma ſtoſunkami Geometrycznemi, to ieſt tyle razy pierwſzy poprzednik zamykać w ſobie powinien ſwego naſtępnika, ile razy i drugi poprzednik zamyka także naſtępnika ſwego. Y tak naprzykład w tey proporcyi: $6 : 3 = 8 : 4$, iak 6, zamyka w ſobie 3, razy 2, tak i 8 zamyka 4, razy 2. Ztąd wynika, że rozmnożenie ſkraynych i średnich wyrazów proporcyi, można oznaczyć, przez trzy iedna-

dnakowe liczby, a tym samym okazać równość wyrazów rozmnożonych, tak skraynych iako i srzednich. Naprzykład, ponieważ 21 : 3 = 28 : 4, i równie 21. zamyka w sobie 3, iak i 28, zamyka 4, razy 7. a zatym tak 21 = 7, razy 3, iak 28 = 7. razy 4; więc 4 razy 21 = 4 × 7 × 3; 3 razy 28 = 3 × 7 × 4. A że 4 × 7 × 3 = 3 × 7 × 4 więc i 4 × 21 = 3 × 28.

Podobnie, ponieważ 16 : 12 = 20 : 15 i tak 16 zamyka w sobie 12, iak 20. zamyka 15, razy $1\frac{1}{3}$ albo $\frac{4}{3}$; a przeto tak 16 = $\frac{4}{3}$ × 12, iak i 20 = $\frac{4}{3}$ × 15; idzie zatym, że tak 15 × 16 = 15 × $\frac{4}{3}$ × 12; iako i 12 × 20 = 12 × $\frac{4}{3}$ × 15.

Tak też ponieważ 8 : 28 = 10 : 35, i 8 = $\frac{2}{7}$ × 28, a 10 = $\frac{2}{7}$ × 35; idzie zatym, że tak iest 35 × 8 = 35 × $\frac{2}{7}$ × 28; iako też 28 × 10 = 28 × $\frac{2}{7}$ × 35.

W ogulności zaś mówiąc, ieżeli iest a : b = c : d; i tak a, zamyka w sobie b, iak, i c, zamyka d razy n; będzie a = n × b, i c = n × d, a zatym tak d × a = d × n × b. iako - - - b × c = b × n × d.

Obiaśniwszy to twierdzenie na wielu przykładach, przystąpi Nauczyciel do następuiącego dowodzenia.

Niech

Fig. 3. Niech będą dwa proſtokąty: ABCD, BDEF, i boki iednego, AB, BC niech będą ſkraynemi tey proporcyi, ktorey boki BD, BF drugiego proſtokąta ſą średniemi; to ieſt niech ſię ma; AB: BF = BD: BC, w takim razie te dwa proſtokąty ſą równe.

Wykreślenie. Uſtawmy tak te dwa proſtokąty, aby w kątach dwóch przeciwnych przy B ſchodziły ſię, i przedłużmy boki ich DC, EF, aż do zeyścia ſię w punkcie G.

Dowodz. Proſtokąty: AC, BC (w) których iednakowa ieſt wyſokość, maią ſię do ſiebie, iak ich Podſtawy AB, BF. Proſtokąty także BE, BG iednakowey wyſokości, maią ſię do ſiebie, iak ich Podſtawy; ED, BC. Aże z podania ieſt liniia AB, do BF, iak liniia BD: BC; więc też i proſtokąt AC tak ſię ma do proſtokątu BG, iak proſtokąt BE, do proſtokątu BG; czyli Proſt: AC: Proſt. BG = Proſt. BE: Proſt. BG, a zatym Proſt. AC = Proſt. BE, co ſamo krócey tak ſię wyraża.

AC:

(w) *Proſtokąty zwykły ſię wyrażać przez dwie litery, na końcach przeciwnych dwóch kątów napiſane.*

AC : BG = AB : BF

BE : BG = BD : BC

Aże AB : BF = BD : BC

więc AC : BG = BE : BG.

A zatym AC = BE.

229. *Wzaiemnie też* (Reciprocè, albo è converſo) dowieść można, że ieżeli dwa Proſtokąty ſą równe; wziąwſzy dwa boki iednego za ſkrayne, a dwa boki drugiego za średnie wyrazy proporcyi, znaydziemy między temi bokami proporcyą.

W liczbach oczywiście ſię to pokazuie, bo gdyby boki dwa iednego Proſtokąta wyrażone były przez liczby: 10, i 42, a boki drugiego przez 15, i 28, obadwa te proſtokąty zawierałyby w ſobie 420, naprzykład ſtop kwadratowych, to ieſt byłoby, $10 \times 42 = 15 \times 28$, zkądby wypadła ta proporcya: 10 : 15 = 28 : 42.

Wykreślenie Geometryczne do tego Twierdzenia ſłużące, nie odmienne byłoby od poprzedzaiącego. Dowodzenie także że

że w środku dopiero działania różniłoby się; to iest: ponieważ.

AC: BG = AB: BF

i BE: BG = BD: BC

A przez podanie AC = BE.

więc AC: BG = BE: BG

A zatym AB BF = BD: BC

230. *Wnioski* 1. Ponieważ w proporcyi, tenże sam być może następnik pierwszego stosunku, co i poprzednik drugiego; naprzykład: 8: 4 = 4: 2, albo; 8: 4: 2, przeto kwadrat z średniey linii Geometrycznie proporcyonalney, równa się też Prostokątowi z dwóch linii skraynych; i znowu, ieżeli kwadrat równy iest prostokątowi, bok kwadratu będzie linią średnią proporcionalną między bokami Prostokąta,

Te podania były wyłożone, w Rozdziałach szostym, i ośmym, lubo sposobem odmiennym.

2. Można to samo przystosować i do równoległoboków, chociaż nie prostokątnych, byleby kąty iednego, równe były kątom

kątom drugiego; także i do Troykątów, które kąt ieden spolny maią; bo ieżeli ramiona ich około tego kąta są proporcyonalne, tak, żeby można wziąść dwa ramiona iednego Troykąta za skrayne, a dwa drugiego za średnie, te dwa Troykąty będą sobie równe; i wzaiemnie to ztąd wynika, że takie Troykąty, są połowami dwoch równoległoboków równokątnych, maiących za boki ramiona tego kąta spolnego.

3. Przystosowanie to uczynić można, i do równoległoboków różnokątnych, biorąc zamiast boku iednego, w obydwóch, wysokość- oznaczaną przez prostopadłą, spuszczoną od końca boku iednego na bok drugi; tak dalece, że te dwa równoległoboki będą równe, gdy Podstawa i wysokość iednego będą mogły być wzięte za dwie liniie skrayne, a podstawa i wysokość drugiego za dwie liniie średnie proporcyonalne; i wzaiemnie, ieżeli te cztery liniie będą proporcyonalne, równoległoboki bądą też równe.

4. Jeżeli cztery liniie są w proporcyi, można zawsze odmienić mieysce dwom średnim, lub dwom skraynym, a nawet i dwie średnie położyć na mieysu dwoch skraynych, lub skrayne na mieyscu śre-

dnich, nie psuiąc proporcyi; ponieważ przy takich odmianach, prostokąt z średnich równy iednakowo będzie prostokątowi z skraynych.

231. *Twierdz.* 2. Gdy przez punkt iaki w kole, lub za kołem, poprowadziemy dwie liniie, któreby okrąg koła przecinały po obydwóch stronach; prostokąt z dwóch części iedney z tych linii zawartych między tym punktem i okrągiem koła, będzie równy Prostokątowi z dwóch części drugiey linii zamkniętych także między tym punktem, i koła okrągiem.

Fig. 4. 1. Niech będzie w kole punkt A, przez który przeciągnione są cięciwy BC, ED; Prostokąt, EA × AD równy iest Prostokątowi, BA × AC.

Wykreśl. Poprowadźmy liniie, BD, EC.

Dowodz. Troykąty BAD, EAC są do siebie podobne, kąty ich albowiem w wierzchołku A przeciwne, są równe, i kąty B, E, (189) równe, iako obeymuiące ramionami swemi tenże sam łuk CD. Będą więc boki tych Troykątów proporcyonalne; i AB: AE = AD: AC. a zatym AB × AC = AE × AD.

2. Niech

2. Niech będzie punkt A, za kołem, od tego punktu ciągnieymy dwie Linie AB, AE, przecinaiące okrąg koła, iedna w B, i C, a druga w E i D. Prostokąty AB × AC, i AE × AD, będą równe. *Fig.* 5.

Wykreśl. Poprowadźmy linie BD, EC.

Dowodz. Troykąty, BAD, EAC, maią kąt A, spolny i kąty B, i E równe, bo wsparte ramionami na tym samym łuku CD; więc te Troykąty maią boki proporcyonalne; i AB: AE = AD: AC; a zatym, AB × AC = AE × AD.

To Twierdzenie zwykło się ieszcze i tak wyrażać.

1. Jeżeli dwie cienciwy przecinaią się w kole, części ich będą *odwrotnie* (inverse albo in ratione inversa) proporcyonalne; to iest: tak się będzie miała część iedney cienciwy, do części cienciwy drugiey iak się ma druga część cienciwy drugiey, do drugiey części cienciwy pierwszey.

Dwie tedy części cienciwy iedney, będą średniemi proporcyi, a dwie części cienciwy drugiey będą skraynemi teyże proporcyi.

2. Gdy dwie liniie przecinaiące koło, wychodzą od iedne.o punku za kołem; są odwrotnie proporcyonalne z częściami temi, które za koło wychodzą; to ieſt, tak ſię ma iedna przecinaiąca do drugiey, iak ſię ma część drugiey za kołem, do części pierwſzey także za kołem: iedna tedy przecinaiąca, i część iey za kołem ſą średniemi w proporcyi, a druga przecinaiąca, i część iey także za kołem, ſą ſkraynemi tey ſamey proporcyi.

232. *Uwaga. W pierwſzym razie.* Gdy iedna z cienciw, ieſt średnicą koła, a druga do niey proſtopadłą; ta proſtopadła na dwie równe części będzie od średnicy podzielona; i Proſtokąt z dwóch części średnicy, będzie równy kwadratowi z połowy drugiey cienciwy. Proſtopadła tedy ſpuſzczona od któregokolwiek punktu koła, na średnicę, ieſt średnią Geometrycznie proporcyonalną między dwiema częściami średnicy; który to przypadek ſzczegulny, i wyżey iuż ieſt dowiedziony.

W drugim razie. Gdy iedna z linii zamiaſt coby miała przecinać koło, ieſt *ſtyczną* (tangens) iego, można ią uważać iak przecinaiącą koło, ale tak, że część iey w kole niknie dla małości, i dwa iey punkta przecięcia ſchodzą ſię w punkt ieden.

W tym

W tym razie Prostokąt ieden, odmienia się na kwadrat z stycznéy. Y ztąd wynika to wielkiey wagi podanie; że ieżeli od iednego punktu, wychodzą dwie liniie, iedna przecinaiąca koło, a druga styczna z kołem, kwadrat z styczney równać się będzie Prostokątowi z całey Linii przecinaiącey, i z części iey za kołem; czyli, to iest; że styczna iest średnią Geometryczną między całą przecinaiącą, i częścią iey za kołem. Następuiące, dowodzenie iest ieszcze iaśnieysze, i bardziey pod oczy podpadaiące.

Niech będzie AD, styczna, AB zaś przecinaiąca koło, i od tegoż samego punktu A poprowadzona. Ta styczna AD iest średnią Geometryczną między przecinaiącą AB, i iey częścią, AC, za kołem. *Fig. 6*

Wykreśl: Od punktu dotkinięcia D, poporowadźmy dwie liniie: DB, DC.

Dowodz: Troykąty: ABD, ADC, są do siebie podobne; maią albowiem spolny kąt A, i kąt odcinka, ADE, równy kątowi w odcinku na przemian ABD (195) a zatym i trzeci kąt w iednym Troykącie równy iest kątowi trzeciemu w drugim: będą więc tych Troykątów boki proporcyonalne, i AB : AD = AD : AC, to iest kwadrat z styczney AD, równy będzie Prostokątowi z AB przez AC.

Fig. 7, 233. Wfzczegulności zaś niech będzie ſtyczna AT. i przecinaiąca AD, od tegoż ſamego punktu A poprowadzona, przez środek C, koła.

Pociągniymy promień CT do punktu dotkaięcia T; kwadrat z linii AC, równy będzie ſummie kwadratów z AT, i CT, to ieſt: równy będzie ſummie z Proſtokąta AD przez AB, i z kwadratu BC. Zkąd wynika ten wnioſek, że ieżeli średnicę BD, podzielemy na dwie równe części w punkcie C, i potym na iey przedłużeniu, weźmiemy iakikolwiek punkt, naprzykład A; Proſtokat z całey tey linii i iey przedłużenia (AD × AB) z przydanym kwadratem, z połowy średnicy (BC^2.) równać ſię będzie kwadratowi z linii złożoney z połowy średnicy, i z iey przedłużenia (AC^2) to ieſt będzie $AD \times AB + BC^2 = AC^2$.

234. *Zagad:* 1. Maiąc dany Proſtokąt, i kwdrat, znaleść dwie liniie, ktoreby tak ſię miały do ſiebie, iak ſię maią, ten Proſtokąt i kwadrat.

Rozwiąz. Zamieńmy Proſtokąt dany na inny iemu równy, ktoryby za bok ieden, miał bok kwadratu; czyli (co na iedno wychodzi) ſzukaymy cawartey linii proporcyonalney do boku kwadratu, i do dwóch

dwóch boków Proſtokąta. Bok kwadratu, tak ſię mieć będzie do tey czwartey proporcyonalney, iak ſię ma kwadrat do Proſtokąta.

To poſtępowanie zgadza ſię zupełnie z tym, co ſię iuż powiedziało w Arytmetyce (na karcie 89. i 90.) a co tu przez różne przykłady, podobne naſtępuiącemu obiaśnić ieſzcze należy.

Wziąwſzy bok kwadratu za ſpolną miarę, albo za iedność; niechby bok ieden Proſtokąta, zawierał w ſobie 5 razy bok kwadratu, a drugi 7. razy. Czwarta liniia proporcyonalna do boku tego kwadratu, i do dwóch boków Proſtokąta, zawierałaby w ſobie 35; razy bok kwadratu, tak; iako i cały Proſtokąt, zawierałby w ſobie 35 razy cały kwadrat.

235. *Przyſtosowanie.* Podobnym ſpoſobem poſtąpiemy ſobie chcąc znaleść dwie liniie, któreby tak ſię miały do ſiebie, iak ſię maią dwa Proſtokąty; to ieſt, ſzukać będziemy czwartey proporcyonalney do boku iednego Proſtokąta, i dwóch boków drugiego; do tey albowiem czwartey proporcyonalney tak ſię mieć będzie drugi bok pierwſzego Proſtokąta, iak ſię maią powierzchnie tychże Proſtokątów.

Mo-

Możnaby to samo wykonać, szukaiąc sposobem wyżey wyrażonym (234) stosunku każdego z dwóch Prostokąta, do tegoż samego kwadratu, znaleźlibyśmy albowiem, że powierzchnie tych dwóch Prostokątów tak się maią do siebie, iak się maią dwie czwarte proporcyonalne do boku kwadratu, i dwóch boków każdego z osobna Prostokąta.

Niechbyśmy naprzykład znaleźli, że Prostokąt ieden, który nazywam P. zawiera w sobie kwadrat K, tyle razy, ile razy liniia L, zawiera w sobie bok B, kwadratu; to iest: że P: K = L: B.

Niechbyśmy znowu znaleźli, że drugi Prostokąt Q, zawiera w sobie ten sam kwadrat K, tyle razy, ile razy liniia M, zawiera w sobie bok B tegoż kwadratu; to iest: że Q: K = M: B, Wnoszę ztąd, że Prostokąty P, Q, tyle razy zawierać będą ieden drugi, ile razy się zawieraią liniie L. M. iedna w drugiey, to iest: że będzie, P: Q = L: M.

Jakoż ieżeli prostokąt P. zawiera w sobie kwadrat K, dwa, trzy, cztery, i t. d. razy, a prostokąt Q, zawiera naprzykład 6. razy kwadrat K, Prostokąt pierwszy, będzie do Prostokąta drugiego, iak są licz-

liczby; 2, 3, 4, i t. d. do liczby: 6. Aże też i liniia L. zawiera w sobie bok, B. 2, 3, 4, i t. d. razy, więc też i liniia M zawierać będzie bok B, razy 6; a zatym tak się ma Prostokąt P, do Prostokąta Q, iak liniia L, do linii M.

Jeżeli tedy mamy dwie proporcye; nap:
P: K = L: B.
i Q: K = M: B.

W których iednakowe są następniki; poprzedniki pierwsze obydwóch proporcyi tak się do siebie będą miały, iak poprzedniki drugie tychże proporcyi to iest
P: Q = L: M.

236. *Uwaga.* W iedney z dwóch dopiero wyrażonych proporcyi, naprzykład w drugiey można było odmienić mieysce poprzednikom, i następnikom, i te same proporcye tak wyrazić:

P: K = L: B.

K: Q = B: M.

Zkąd wynika. P: Q = L: M.

237. *Defin.* Gdy będą trzy iakiekolwiek ilości iednakowego gatunku stosunek pierwszey

ſzey z nich, do trzeciey nazywa ſię *ſtoſunkiem ſkładanym* (ratio compoſita) z ſtoſunku pierwſzey ilości, do drugiey, i drugiey do trzeciey. Y tak ſtoſunek P. do Q nazywa ſię ſkładanym z ſtoſunku P do K. i K do Q. Tak też ſtoſunek L do M będzie ſkładanym z ſtoſunku L do B, i B do M. Takie ſtoſunki złożone z ſtoſunków równych ſą równe. I tak ponieważ ſtoſunek P do K. i K do Q równy ieſt pierwſzy ſtoſunkowi L do B. drugi ſtoſunkowi B do M; będzie też i ſtoſunek ſkładany P. Q równy ſtoſunkowi ſkładanemu L do M.

218. *Przyſt:* 1. To, co ſię tu powiedziało o ſtoſunku ſkładanym, dobrze będzie przyſtoſować do reguły trzech ſkładaney, o którey mowiło ſię w Arytmetyce.

Przykład. Rzemieślnicy z iednakową pilnością pracuiący około iakiey roboty, tym więcey iey zrobią, im większa będzie ich liczba, i czaſ dłużſzy ſtrawiony na teyże robocie. Przeto gdy porownać chcemy dwie iednakowego gatunku roboty któremi ſię dwie kupy Rzemieślników zatrudniaią, trzeba rozmnożyć (iako ſię to iuż w Arytmetyce wyłożyło) liczby Rzemieślników przez liczby dni, przez które pracowali; a roboty przez tych Rzemieślników wygotowane, tak ſię będą do ſiebie miały, iak ſię maią tamte dwie liczby rozmnożone. Niech-

Niechy naprzykład liczby Rzemieślników były do siebie, jako 2 do 3; a czasy przez które robili jak 5. do 7. Pierwszy stosunek 2 do 3, równa się stosunkowi tychże liczb przez tę samę liczbę 5 rozmnożonych, i będzie, jak 10 do 15. Drugi stosunek 5 do 7; równa się stosunkowi tychże liczb przez tę samę liczbę 3 rozmnożonych, i będzie jak 15: do 21. A zatym stosunek robot, który się równa stosunkowi 10 do 21, równy będzie stosunkowi składnemu z stosunku 10 do 15, i 15 do 21; z których pierwszy równy iest stosunkowi 2 do 3, a drugi równy stosunkowi 5 do 7.

Podobnie rozumować można, gdy więcey niż dwa będzie stosunków.

239. *Przysło:* 2 Wszystkie także działania o zamianach, i inne podobne, któremi zatrudnialiśmy się w Arytmetyce, zasadzały się na stosunkach złożonych z dwóch lub więcey stosunków równych, jako to bardzo łatwo w przykładach okazać można.

240. *Przysło:* 3. Same nawet niektóre działania, które zdaią się być tylko zwyczaynym mnożeniem, można podciągnąć pod stosunek składany.

Przykład: 1. 15. Czerwonych złotych ileż czyni groszy Polskich? Aby

Aby znaleść wartość 15. czerwonych złotych w groſzach, zwyczaynie obracaią ſię czerwone złote na złote, a te potym na groſze. Rozwiąż-m t raz to zadanie, roſkładaiąc ie na ſtoſunki poiedyncze, i ſzukaiąc ſtoſunku z nich złożonego; a to dla pokazania, że czaſem i niemyśląc o tym, używamy w ſamey rzeczy ſtoſunku ſkładanego.

Stoſunek wartości 15. czerw: do wartości w groſzach, ſkłada ſię z ſtoſunków naſtępuiących:

1. Wartość 15. czer: zł. do wartości 1. czer: zł. ieſt, iak - - 15 do 1.

2. Wartość 1. czer: zł. do wartości 1, złotego - iak - - 18 do 1.

3. Wartość 1. złotego do wartości 1. groſza - iak - - 30 do 1.

4. Stoſunek z tych trzech złożony ieſt iak - - - - 8100 do 1.

Więc 15. czerwonych złotych czyni groſzy - 8100.

Przykład 2. Oſoba 30 lat maiąca, ileż minut żyła, rachuiąc w Roku dni 365?

Stoſunek 30 lat do iedney minuty ſkłada ſię z ſtoſunków, naſtępuiących:

Z Stosunku 30 lat do 1. roku, to iest,
- - - - 30 do 1

Z Stosunku 1. roku do 1. dnia, to iest;
- - - - 365 do 1,

Z Stosunku 1. dnia do 1. godziny, to iest; - - - 24 do 1,

Z Stosunku 1. godziny do 1. minuty; to iest; - - 60 do 1,

Stosunek z tych wszystkich złożony iest; - 15768000. do 1.

A zatym w 30 latach iest minut - - - 15768000.

241. *Przystos.* 4. Widzieliśmy wyżey, że dla znalezienia stosunku dwóch Prostokątów, trzeba było ieden z nich zamienić na inny, któryby miał bok równy bokowi w drugim Prostokącie, albo (co na iedno wychodzi) trzeba było znaleść czwartą liniią proporcyonalną do iednego boku iednego Prostokąta, i dwóch boków drugiego; i że tak się ma pierwszy Prostokąt do drugiego, iak się ma drugi bok pierwszego prostokąta, do tey czwartey linii proporcyonalney. Z wyczaynie to podanie tak się wyraża: że *stosunek dwoch Prostokątów składa się z stosunków ich boków.* Co tak okazać można.

Niech

Niech będą dwa boki iednego Prostokąta nazwane, A i B, a dwa boki drugiego prostokąta, C i D. Szukamy czwartey linii proporcyonalney trzem bokom B, C, D, i ta niech będzie L; to iest niech będzie, B : C = D : L, stosunek linii A, to iest drugiego boku pierwszego prostokąta, do L, równy będzie stosunkowi pierwszego prostokąta, do drugiego (235.) Aże stosunek A do L składa się z stosunków, A do D, i D do L; stosunek zaś A do D, iest stosunkiem boku iednego, iednego Prostokąta do boku drugiego, drugiego Prostokąta; a stosunek D do L, równa się stosunkowi drugich dwóch boków B i C (bo było; B : C = D : L;) *więc stosunek dwóch Prostokątów, składa się z stosunków ich boków.*

242. *Przyst.* 5. Gdy dwa Prostokąty, które z sobą porownywać mamy, są kwadratami; ponieważ boki kwadratu są wszystkie równe, kwadrat ieden tak się mieć będzie do kwadratu drugiego, iak się ma bok ieden pierwszego kwadratu do trzeciey linii proporcyonalney z tym bokiem, i z bokiem drugiego kwadratu. Niech naprzykład A i B, będą boki tych dwóch kwadratów, a C, niech będzie liniia trzecia proporcyonalna do tych boków, kwadrat pierwszy tak się mieć będzie do kwadratu drugiego, iak się ma A do C.

243. *Defin.* Ten ſtoſunek A do C, ſkłada ſię z ſtoſunku A do B, i B do C. Jako zaś te dwa oſtatnie ſtoſunki ſą równe; bo kładliśmy A do B, iak B do C, albo A: B: C, tak ſtoſunek z nich złożony, nazywa ſię *dwumnożnym*, (Ratio duplicata) że wykładnik iego, ieſt kwadratem iednego z wykładników, dwóch pierwſzych ſtoſunków.

Niechby boki dwóch kwadratów miały ſię do ſiebie, iak 1. do 2; Powierzchnie tych kwadratów będą do ſiebie w tym ſamym ſtoſunku, w którym ieſt 1. do 4; trzecia też liniia proporcyonalna do 1. i 2, ieſt: 4; a zatym te dwa kwadraty tak ſię do ſiebie mieć będą, iak ſię ma bok iednego z nich do trzeciey linii proporcyonalney.

Jeżeli boki dwóch kwadratów będą do ſiebie, iak 2, do 3, powierzchnię ich będą, iak 4, do 9; trzecia też liniia proporcyonalna do 2 i 3, ieſt: $\frac{9}{2}$, a ſtoſunek 2 do $\frac{9}{2}$ ieſt ten ſam, co i ſtoſunek 4 do 9.

Jako ſtoſunek pierwſzy naprzykład linii do trzeciey *ciągło* (continuè) proporcyonalney, nazywa ſię ſtoſunkiem dwumnożnym ſtoſunku pierwſzey linii do drugiey;

tak

tak znowu ſtoſunek pierwſzey tey linii do drugiey, nazwać można ſtoſunkiem *dwudzielnym* (ratio ſubduplicata) ſtoſunku linii pierwſzey do trzeciey. Y tak gdy trzy liniie przez liczby oznaczone: 1, 2, 4, ſą ciągłe proporcyonalne, to ieſt 1 do 2, iak 2 do 4; albo 1 : 2; 4. Ponieważ pierwſza do trzeciey, to ieſt 1 do 4 ieſt w ſtoſunku dwumnożonym pierwſzey do drugiey, to ieſt iak 1^2 do 2^2; będzie znowu 1. do 2, w ſtoſunku dwudzielnym 1, do 4; to ieſt iak $\sqrt{1}$. do $\sqrt{4}$.

244. *Zagadn*: 2. Maiąc dany kwadrat ieden, znaleść drugi, któryby do pierwſzego był w danym ſtoſunku.

Rozwiąz. Danemu ſtoſunkowi znaydźmy inny równy maiący za poprzednika bok kwadratu danego. Między tym porzednikiem, i naſtępnikiem iego, ſzukaymy średniey proporcyonalney, ta będzie bokiem kwadratu żądanego.

Albo tak: Złączmy wproſt z ſobą dwie liniie, maiące do ſiebie ten ſam ſtoſunek, który maią dwa wyrazy, naprzykład dwie liczby dane. Na tey linii z dwóch złożoney, iako na średnicy, nakreślmy półkole, i od punktu ich łączenia ſię wynieśmy proſtopadłą, aż do okręgu. Od punktu zey-

ścia

ścia się prostopadłey z okrągiem poprowadźmy dwie liniie do dwóch końców średnicy, kwadraty tych dwóch linii, mieć będą do siebie stosunek; a zatym ieżeli iedna z nich równa iest bokowi kwadratu, danego, równa będzie bokowi kwadratu, którego szukamy. Jeżeli zaś pierwsza nie równa iest bokowi kwadratu danego, tó trzeba na niey, zacząwszy od punktu iey przecięcia z okrągiem, wyznaczyć liniią równą bokowi kwadratu danego i od punktu naznaczonego prowadzić równoodległą od średnicy, a ta równoodległa przetnie drugą liniią w tym punkcie, który wyznaczy długość linii kwadratu szukanego.

To Zagadnienie przystosować należy do przykładów Arytmetycznych.

Przykład. 1. Znaleść kwadrat, któryby był $\frac{3}{5}$, kwadratu danego, to iest, któryby tak się miał do niego, iak 3, do 5.

Bok kwadratu danego dzielę na dwie części, któreby tak się miały do siebie iak 2 do 3. Na tymże boku, iak na średnicy kreslę półkole, a od punktu podziału wynoszę prostopadłą aż do iey spotkania się z okrągiem. Od tego punktu spodkania prowadzę linią do końca średnicy, w tę stro-

nę, gdzie część iey większa znayduie się. Ta linia będzie bokiem kwadratu fzukanego.

Przykład. 2. Maiąc dany kwadrat dobrać mu drugi, którýby tak się miał do niego, iak 5, do 3.

Liniią równą bokowi danego kwadratu przeciągniymy daley, aż takich 5 części zamykać w fobie będzie, iakich 3 nieprzeciągniona zamykała.

Na teyże linii tak przeciągnioney, iak na średnicy nakreślmy połkole, i od punktu, od ktorego ieft przedłużona, wynieśmy proftopadłą, aż do okrągu, i od tego punktu, gdzie go fpotyka, poprowadźmy liniią do końca tego średnicy, gdzie część iey równa się bokowi danego kwadratu. Ta oftatnia linia będzie wymiarem boku kwadratu, którego fzukamy.

245. *Uwaga.* Rozwiązanie Arytmetyczne takowych zagadnień zafadza się na wyciągnieniu pierwiaftku kwadratowego.

Gdy naprzykład znaleść potrzeba kwadrat, którýby był $\frac{3}{5}$. kwadratu danego, to ieft, którýby tak się miał do niego iak 3 do 5; rózmnożywfzy obiedwie te liczby przez 5, będzie 3 do 5, iak 15 do 25;

25; Więc kwadrat, którego szukamy tak się mieć będzie do kwadratu danego, iak 15 do 25, a zatym bok kwadratu, którego szukamy, będzie do boku kwadratu danego, iak iest liczba, która przez siebie rozmnożona czyni 15, do liczby, która przez siebie rozmnożona czyni 25; to iest: iak pierwiastek kwadratowy z 15 do 5. Trzeba tedy wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z 15, i ten pokaże wielkość boku kwadratu szukanego, to iest trzeba znaleść średnią liczbę proporcyonalną między dwiema danemi, 3 i 5; rozmnożywszy iedne przez drugą, i z rozmnożoney liczby 15, pierwiastek kwadratowy wyciągnowszy.

Działanie więc Geometryczne zmierzaiące do znalezienia średniey linii proporcyonalney między dwiema danemi, iest to samo, co w Arytmetyce wyciąganie pierwiastku kwadratowego z liczby daney; co można i tym potwierdzić, że kwadrat liczby średniey Geometrycznie proporcyonalney między dwiema innemi, równa się tymże dwom liczbom przez siebie rozmnożonym; a zatym ta średnia liczba znaydzie się, wyciągaiąc pierwiastek kwadratowy z tych dwóch liczb, iedney przez drugą rozmnożonych.

Gdyśmy wyżey Geometrycznie szukali kwadratu, któryby miał się do kwa-

dratu danego w danym ſtoſunku, ſzukaliśmy przez wykreślenie, średniey linii Geometrycznie proporcyonalney między dwiema w danym ſtoſunku, będącemi, i ta średnia liniia była bokiem kwadratu ſzukanego.

246. Przyſtoſować z łatwością można Podania dopiero wyłożone do innych iakichkolwiek figur proſtokreślnych, i do ſiebie podobnych. Pokaże ſię to nayprzod na Proſtokątach podobnych, potym na Troykątach, naoſtatek w ogulności na iakichkolwiek figurach proſtokreślnych.

Gdy będą dwa Proſtokąty podobne, i na ich dwóch bokach odpowiadaiących ſobie zrobiemy dwa kwadraty, te dwa Proſtokąty, tak ſiebie mieć będą, iak te dwa kwadraty.

Tab. XIV. Fig. 1. Niech będą dwa proſtokąty podobne, ABCD, abcd; ich powierzchnie, tak ſię do ſiebie mieć będą, iak ſię maią powiezchnie kwadratów ABEF. abef. zrobione na bokach odpowiadaiących ſobie; AB. ab. Jakoż Proſtokąt ABCD, tak ſię ma do kwadratu ABEF, iak wyſokość AD do wyſości AF = AB to ieſt:

ABCD : ABEF = AD : AB.

Podobnie abcd : abef. = ad : ab.

Aże dla podobieństwa prostokątów, iest też AD: AB = ad: ab, więc
ABCD: ABEF = abcd: abef.
albo, ABCD: a b c d = ABEF: abef

To samo ieszcze wyłożyć można sposobem następuiącym:

Niech dwie podstawy dwóch Prostokątów podobnych będą do siebie iak 5 do 3; wysokości ich będą też w takowym stosunku 5 do 3; azatym ieżeli podzielemy iednę podstawę na 5, a drugą na 3, równe części, wysokość także, iednę na 5 części równych, a drugą na 3 równe pierwszym; powierzchnie tych dwóch Prostokątów będą mogły być podzielone, pierwsza na 25, a druga na 9 części równych w obydwóch Prostokątach, tak iak też i kwadraty na tych samych podstawach zrobione mogłyby być podzielone, ieden na 25, a drugi na 9. równych kwadracików; ztąd wypływa, że i Troykąty prostokątne podobne, tak się maią do siebie, iak kwadraty ich boków odpowiadaiących sobie, bo także Troykąty są w samey rzeczy połowami prostokątów podobnych, i maiących też samę, co one, podstawę, i wysokość. *Fig.* 2

247. Można ieszcze przystosować to samo i do iak chkolwiek Troykątów podobnych; ponieważ albowiem w podobnych Troykątach, wysokości są między sobą iak Podstawy, zatym prostokąty, któreby miały tey wielkości podstawy i wysokości, co i Troykąty, byłyby podobne, i miałyby się do siebie w stosunku dwumnożnym ich boków, albo iak kwadraty ich boków odpowiadających sobie (246) więc, i Troykąty, iako połowy tychże prostokątów, będą do siebie w stosunku także dwumnożnym ich boków.

Jaśniey to wyłożyć można, gdy stosunki boków wyrażone będą przez liczby.

Fig. 3. Niech będzie Troykąt iakikolwiek, którego podwoiliśmy wszystkie trzy boki. Ten drugi Troykąt zmieści w sobie 4 Troykąty, z których każdy przystanie do pierwszego.

Jeżeli w tymże pierwszym Troykącie bok każdy potroiemy, ten drugi Troykąt zamknie w sobie 9 Troykątów, z których każdy przystanie do pierwszego.

Jeżeli znowu każdy bok w pierwszym Troykącie tak przedłużemy, żeby dłuższy był

był był 4, 5, 6, i t. d. razy; ten drugi Troykąt pomieści w sobie, 16, 25, 36, i t. d Troykątów, mogących przystać do pierwszego.

Przeto, ieżeli boki Troykąta iednego zawieraią w sobie 1,2,3,4,5,6,7,8,9 .. razy boki innego Troykąta; powierzchnia pierwszego Troykąta zawierać będzie powiezchnią drugiego, 1, 4, 9, 25, 36, 49, 64, 72, 81. -- razy.

Podobnie, powierzchnie kwadratów, których boki zawieraią 1. 2, 3. 4. 5, 6, 7, 8, 9. - - razy bok innego kwadratu, będą zawierać powierzchnią tego drugiego kwadratu, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 72, 81. - - razy.

Gdyby boki dwoch Troykątów podobnych miały się naprzykład do siebie, iak 5, do 7; możnaby w pierwszym Troykącie umieścić 25, a w drugim, 49 równych Troykątów, których wszystkich boki przystaćby mogły do siebie; a zatym powierzchnie tych dwoch Troykątów miałyby się do siebie, iak 25, do 49; to iest iak powierzchnie dwóch kwadratów, których boki byłyby do siebie iak 5, do 7.

Nakoniec, można tego samego dowieść sposobem podobnym, iakośmy dowodzili,

li, że kwadraty maią się do siebie w stosunku dwumnożnym ich boków. (242)

I tak, gdy będą dwa iakiekolwiek Tròykąty podobne, do których dwòch bokowodpowiadaiących sobie, znayduiemy trzecią liniią, ciągło proporcyonalną; powierzchnia iednego Troykąta, tak się mieć będzie do powierzchni drugiego, iak bok pierwszego Troykąta, który wzięty iest za pierwszy wyraz proporcyi, do tey trzeciey linii proporcyonalney.

Fig. 4. Niech będą dwa Troykąty podobne, ABC, abc, znaydźmy AD trzecią ciągło proporcyonalną do boków AB, ab, i tę samę AD przenieśmy na liniią AB od A do D. Powierzchnia Troykąta ABC, będzie do powierzchni Tròykąta abc, iak AB do AD.

Wykreślenie. Poprowadźmy liniią CD.

Ponieważ dla podobieństwa Troykątów iest: AB : ab = AC : ac, a przez wykreślenie AB : ab = ab : AD, będzie więc; AC : ac = ab : AD. a zatym Troykąty cab, CAD, maią kąty A i a równe, i ramiona około tych kątów *na odwrot* proporcyonalne; Będą tedy te dwa Troykąty równe co do powierzchni; a przeto

sto-

ſtoſunek Troykąta ABC, do każdego z nich będzie iednakowy. A że ſtoſunek tegoż Troykąta ABC, do Tròykąta ADC, równy ieſt ſtoſunkowi linii AB, do linii AD, więc też i Troykąt ABC tak ſię mieć będzie do Troykąta abc, iak liniia AB do linii AD; to ieſt w ſtoſunku dwumnożnym boków AB, ab.

Idzie ztąd, że i równoległoboki podobne ſą także między ſobą, w ſtoſunku dwumnożnym ich boków; ponieważ takie równoległoboki dwa razy w ſobie zamykaią Troykąty podobne.

248. Można także było równie dokładnie dowieść, że Troykąty podobne ABC, abc, ſą między ſobą w ſtoſunku dwumnożnym ich boków AC, ac; a zatym, że ſtoſunek dwumnożny AB do ab, równy ieſt ſtoſunkowi dwumnożnemu AC, do ac to ieſt; że ſtoſunki dwumnożne z równych ſtoſunków, ſą równe; co też iuż ſię ogulnie pokazało, mòwiąc wyżey o ſtoſunkach ſkłada ych z innych ſtoſunków.

Jakoż, niech będą trzy iakiekolwiek ilości ciągło proporcyonalne; A, B, C, i drugie trzy ciągło także proporcyonalne; a, b, c, i wrównym z pierwſzemi ſtoſunku. Stoſunek ſkładany A do C, równy będzie ſtoſunkowi, ſkładanemu *a* do *c*, to ieſt; A: C = a: c.

Bo

Bo, ponieważ ſtoſunek A do B równy wzięliśwy ſtoſunkowi a do b, będzie.

A : B = a : b; Aże A : B = B : C

i a : b = b : c

Więc B : C = b : c

azatym A : C = a : c

W liczbach to ſamo iaśniey ſię okazuie.

Niech będą trzy liczby ciągło proporcyonalne 8, 4, 2, i drugie trzy ciągło także i równie proporcyonalne; 12, 6, 3, będzie; 8 : 2 = 12 : 3.

Ponieważ albowiem równe ſą ſtoſunki 8 do 4, i 12 do 6, będzie.

8 : 4 = 12 : 6; Aże, 8 : 4 = 4 : 2.

i 12 : 6 = 6 : 3.

Więc 4 : 2 = 6 : 3

Azatym 8 : 2 = 12 : 3.

249 *Podanie przybrane.* Gdy mamy iakiżkolwiek zbiór ſtoſunków równych, których

których wyrazy wszystkie iednakowego są gatunku; summa wszystkich poprzedników, tak się mieć będzie do summy wszystkich następników, jak każdy w szczególności poprzednik, do swego następnika.

Bo, ieżeli każdy z osobna poprzednik dwa, trzy, cztery i t. d. razy, zamyka w sobie swoiego następnika, wszystkie też razem poprzedniki zamykać będą wszystkie razem następniki dwa, trzy, cztery i t. d. razy; a zatym summa wszystkich poprzedników, tyle razy zamykać będzie summę następników, ile każdy z osobna poprzednik, swego następnika,

I tak niech będą równe stosunki, 64 do 32; 50 do 25; 42, do 21; 30 do 15; 24 do 12; 18 do 9; 10 do 5; 8 do 4; 6. do 3; 4 do 2; 2 do 1. Summa wszystkich poprzedników = 258, a summa wszystkich następników = 129; będzie tedy, 258: 129 = 64: 32; albo = 50: 25; albo = 42: 21 i t. d.

250. *Twierdzenie.* 3. Jakieżkolwiek są Figury prostokreślne podobne, zawsze te do siebie będą w stosunku dwumnożnym boków odpowiadaiących sobie.

Wy-

Fig. 5. *Wykreśl,* Od wierzchołków dwóch kątów odpowiadaiących w obydwóch figuraeh, poprowadzmy przekątne do innych kontów, do których mogą być poprowadzone.

Dowodzenie. Dwie te figury będą podzielone na Troykąty, które z osobna brane w iedney figurze, będą podobne Troykątom odpowiadaiącym w drugiey figurze. Każdy zaś wszczegulności Troykąt w iedney figurze, będzie do Troykąta odpowiadaiącego sobie w drugiey figurze w stosunku dwumnożnym boków odpowiadaiących; wszystkie tedy Troykąty, z których się składa iedna figura, będą poprzednikami, a wszystkie troykąty pierwszym odpowiadaiące, z których się składa druga figura, będą następnikami tamtych; a zatym summa wszystkich Troykątów, ktore składaią iednę figurę (to iest ta cała figura) tak się mieć będą do summy wszystkich Troykątów, z których się składa druga figura (to iest do tey drugiey całey figury) iak się ma każdy wszczegulności Troykąt w iedney figurze, do Troykąta odpowiadaiącego w drugiey figurze; to iest w stosunku dwumnożnym boków odpowiadaiących w tych dwóch figurach.

Wszyst-

Wszystko zatym, cokolwiek się powiedziało o stosunku dwóch kwadratów i o sposobie znalezienia kwadratów, któreby się miały do siebie w danym stosunku, może być przystosowane do iakichkolwiek figur prostokreślnych podobnych.

251. Aby Figurę iaką prostokreślną zrobić podobną i równą danym dwom innym podobnym figurom prostokreślnym, trzeba tym końcem postawić Troykąt prostokątny, dawszy mu za ramiona dwa boki odpowiadaiące sobie w dwóch figurach danych podobnych, a przeciwprostokątna tego Troykąta, będzie bokiem odpowiadaiącym w figurze, którey szukamy.

252. Gdy cztery liniie składaią proporcyą, i na dwóch pierwszych, wyrażaiących ieden stosunek, zrobiemy dwie iakiekolwiek figury podobne, a na dwóch drugich, wyrażaiących drugi stosunek, zrobiemy inne dwie iakiekolwiek figury podobne; w takim razie stosunek dwóch pierwszych figur, równy będzie stosunkowi dwóch drugich, bo tak stosunek dwóch pierwszych figur, iako i stosunek dwóch drugich, iest stosunkiem dwom mnożnym z dwóch równych stosunków.

Prawdzi

Prawdzi się to wszczególności, gdy wszystkie cztery figury są sobie podobne; a tym widocznicy ieszcze się okązuie, gdy te cztery figury są kwadratami.

253. Maiąc dwie proporcye, których wyrazy wszystkie są liniami, Prostokąt z poprzedników dwóch pierwszych stosunków, w każdey proporcyi tak się mieć będzie do Prostokąta z dwóch ich następników, iak Prostokąt z poprzedników, drugich dwóch stosunków do Prostokąta z ichże następników.

Należy to obiaśnić nayprzod na przykładach liczebnych, pokazuiąc, że gdy będą dwie proporcye w liczbach wyrażone, poprzedniki dwóch pierwszych stosunków, w obydwóch proporcyach, ieden przez drugi rozmnożone, tak się mieć będą do swoich następników przez siebie także rozmnożonych; iak i inne dwa poprzedniki, ieden przez drugi rozmnożone, do swoich następników podobnie rozmnożonych.

Przykład. Niech będzie: $14 : 7 = 6 : 3$.

i znowu - $15 : 5 = 12 : 4$.

będzie też $14 \times 15 : 7 \times 5 = 6 \times 12 : 3 \times 4$.

to iest. $210 : 35 = 72 : 12$.

To

To co na liczebnych przykładach widocznie się pokaże, trzeba ieszcze twierdzić rozumowaniem podobnym następuiącemu: Jeżeli poprzednik w pierwszey proporcyi iest dwa razy naprzykład większy od swego następnika, a poprzednik w drugiey proporcyi, trzy razy naprzykład iest większy od swego także następnika; tedy rozmnożywszy pierwszego poprzednika, pierwszey proporcyi, przez pierwszego poprzednika drugiey proporcyi, poprzednik z tych dwóch rozmnożony, będzie dwa razy trzy, to iest sześć razy większy, od następnika podobnie z dwóch następników pierwszych, w obydwóch proporcyach rozmnożonego; a że i drugie dwa poprzedniki, są, ieden dwa razy, a drugi trzy razy, większe od swoich następników, więc tak pierwszy poprzednik, z dwóch pierwszych poprzedników rozmnożony, iak i drugi poprzednik z dwóch drugich rozmnożony, będzie sześć razy większy od swoiego następnika podobnie rozmnożonego; które to rozumowanie przystosować można i do każdego innego wykładnika.

Niech litery A, B, C, D, wyrażaią cztery liniie składaiące pierwszą proporcyą, i niech litery a, b, c, d wyrażaią drugie cztery liniie składaiące drugą proporcyą

cyą; to ieſt: niech będzie; A : B = C : D. i a : b = c : d; będzie też A × a : B × b = C × c : D × d.

Bo nayprzod A : B = Aa : Ba.

i podobnie C : D = Cc : Dc.

Aże - A : B = C : D.

Więc - - Aa : Ba = Cc : Dc

Takteż znowu; a : b = Ba : Bb.

c : d = Dc : Dd.

Aże - a : b = c : d

Więc - - - Ba : Bb = Dc : Dd.

Stoſunek tedy złożony z ſtoſunków:

Aa : Ba.

i Ba : Bb.

To ieſt ſtoſunek Aa : Bb, równa ſię ſtoſunkowi złożonemu z ſtoſunków

Cc : Dc.

i Dc : Dd.

To ieſt ſtoſunkowi, Cc : Dd.

albo co na iedno wychodzi; Aa : Bb = Cc : Dd.

ROZDZIAŁ. X.

O wielokątach foremnych.

254. D*Efini.* Gdy wielokąt ma wszystkie boki i kąty równe, nazywa się *Wielokątem foremnym* (Polygonum regulare.)

255. *Wniosek.* Ponieważ ważność wszystkich razem kątów wielokąta zawisła tylko od liczby boków iego (85) gdy tedy wszystkie kąty wielokąta są równe, ważność iednego z tych kąta, zawisła tylko od liczby boków tegoż wielokąta. Ztąd idzie, że wielokąty foremne, iednakową maiące liczbę boków, kąty też wszystkie maią równe i boki proporcyonalne; są więc do siebie podobne. Można tedy przystosować im to wszystko, co się w ogulności o figurach podobnych powiedziało.

Wiemy iuż sposób wykreślenia Troykąta równobocznego i kwadratu na linii daney; wiemy też iak wpisać w Troykąt równoboczny, lub na nim opisać koło.

Wpisanie w koło dane, Troykąta równobocznego, i opisanie tegoż koła Troy-

kątem, łatwiey się wykonywa przez wykreślenie *Sześciokąta* foremnego (Hexagonum.)

256. *Twierdz:* 1. Bok sześciokąta w koło wpisanego, równy iest promieniowi tegoż koła.

Tab. XV Fig. 1. Niech będzie ABCDEF sześciokąt foremny, w koło wpisany; bok którykolwiek tego sześciokąta na pr: AB, równy iest promieniowi SB tegoż koła.

Wykreślenie. Poprowadzmy promień SA.

Dowodz. Kąt ASB, zamyka szostą część, czterech katów prostych; to iest $\frac{4}{6}$ iednego kąta prostego; aże trzy kąty Troykąta ASB, składaią dwa kąty proste, więc dwa kąty A i B tegoż Troykąta, razem wzięte są różnicą między dwoma kątami prostemi i $\frac{2}{3}$ iednego kąta prostego, to iest czynią $\frac{4}{3}$ kąta prostego. Ponieważ zaś te dwa kąty są sobie równe, więc każdy z nich będzie $\frac{2}{3}$ kąta prostego: a zatym wszystkie trzy kąty Troykąta ASB są równe, i dla tego też i boki wszystkie trzy równe będą. Będzie tedy bok AB, sześciokąta foremnego (czyli cienciwa 60. stopniów) równy promieniowi koła opisanego.

257.

257. *Wniosek* 1. Aby więc wpisać sześciokąt foremny w koło dane, dosyć iest przenieść 6 razy iako cienciwę promień tego koła, na okrąg iego.

258. *Wniosek* 2. Poprowadziwszy linią AC, będzie ona cienciwą trzeciey części okręgu koła, a zatym będzie bokiem Troykąta równobocznego wpisanego w dane koło. Pociągnąwszy tedy liniie AE, CE, Troykąt ACE, będzie Troykątem równobocznym w koło wpisanym.

259. *Twierdzen.* 2 Gdy w koło wpisany będzie Troykąt równoboczny, a przez wierzchołki kątów iego, pociągniemy styczne z kołem tak daleko, aż się z sobą zniydą, te styczne zrobią Troykąt równoboczny na kole opisany.

Niech będzie ABC Troykąt równoboczny wpisany w koło SABC; przez wierzchołki A, B, C. tego Troykąta prowadzone styczne koła, aż do spotkania się ich z sobą, w punktach D, E, F, zrobią Troykąt równoboczny na kole opisany. *Fig.* 2.

Wykreślenie. Pociągniymy promienie SA, SB, SC.

Dowodz: Którykolwiek z kątów w środku koła, naprzykład kąt ASB, i iemu

przeciwny kąt E, między dwiema ſtycznemi zawarty, czynią razem dwa kąty proſte. Aże kąty wſzyſtkie trzy w środku koła ſą równe, więc równe będą i kąty trzy od ſtycznych zrobione; a zatym i Troykąt DEF będzie równoboczny.

Łatwo więc opiſać można dane koło Troykątem równobocznym, wpiſawſzy pierwey w toż koło Troykąt także równoboczny.

260. W ogulności zaś mówiąc: niechby był iakikolwiek Wielokąt foremny w koło wpiſany; ieżeli przez wſzyſtkie wierzchołki kątów tego Wielokąta poprowadziemy ſtyczne koła, tak, aby każde dwie bliſkie z ſobą ſię ſpotykały; Wielokąt, który z tych ſtycznych zrobi ſię, będzie także foremnym.

Dowodz: We wſzyſtkich czworokątach takich iak naprzykład ASBE, kąty między dwiema ſtycznemi zawarte, iak naprzykład kąt E, będą równe; a zatym wſzyſtkie kąty tego Wielokąta będą równe.

Wſzyſtkie także Troykąty, iak naprzykład ABE będą równoramienne, i kąty w iednym Troykącie, równe będą kątom w drugim, i podſtawy w nich, iak

na-

naprzykład: iest podstawa AB będą równe; a zatym wszystkie te Troykąty mogą przystać do siebie, i ztąd boki iednego Troykąta, równe będą bokom drugiego. Więc summa dwóch takich równych boków iednakowa zawsze będzie. Aże bok naprzykład EF iest summą dwóch takich równych boków Wielokąta opisanego, więc wszystkie boki tego Wielokąta równe będą.

261. *Twierdz.* 3. W każdy Wielokąt foremny, można wpisać iedne koło, i drugie koło na nim opisać, a obadwa te koła, spolny mieć będą środek.

Niech będzie iakikolwiek sześciokąt foremny, ABCDEF, można zawsze wpisać weń koło, i drugie na nim opisać, a te dwa *koła* będą *spotśrodkowe.* (circuli concentrici.)

Dowodz. Od środka dwóch boków bliskich, naprzykład od G, i H, wyprowadziwszy dwie prostopadłe: GS, HS; punkt S przecięcia ich, iednakowo będzie odległy od trzech wierzchołków bliskich A, B, C (według tego co się iuż powiedziało o opisaniu kołem Troykąta) będą tedy równe liniie AS, BS, CS; a zatym Troykąty SBC, SBA równe względem siebie *Fig.* 3.

boki

boki mieć będą, i ieden Troykąt przyſtać może do drugiego; a wſzczególności kąt SBC, równy ieſt kątowi SBA, i każdy z nich czyni połowę kąta w wielokącie, to ieſt kąta ABC. Aże też równe ſą i kąty SCB, SBC, więc i kąt SCB, będzie połową kąta w Wielokącie, a zatym kąt SCD, będzie drugą iego połową. Maią więc Troykąty: SCD, SCB ſpolny bok: SC, równe boki: CD, CB, i kąty w C między niemi zawarte, równe. Mogą tedy i te dwa Troykąty przyſtać do ſiebie; a wſzczególności liniie SB, SD równe będą. Więc to koło, którego środkiem ieſt S, i które przechodzi przez punkta bliſkie: A, B, C, przechodzić także będzie i przez punkt naſtępuiący: D. Podobnym ſpoſobem pokazać można, że toż koło przechodząc przez punkta: B, C, D, przechodzić będzie i przez punkt E. i t. d.

Wſzyſtkie promienie: SA, SB, SC, SD, i t. d. dzielą w wierzchołkach na dwie równe części, kąty Wielokąta, iako ſię pokazało; a zatym dwa Troykąty naprzykład SBH, SBG, mogą przyſtać do ſiebie, bo maią kąty proſte przy H i G, bok ſpolny: SB, i kąty przy B równe; a wſzczególności liniie SH, SG ſą równe; toż ſamo możnaby dowieść i względem innych proſtopadłych ſpuſzczonych od środka S,

na

na boki wielokąta. Punkt tedy S, iest iednakowo odległy od wszystkich boków Wielokąta, a zatym iest środkiem koła, któreby wpisać można w Wielokąt.

262. *Twierdz.* 4, Maiąc Wielokąt foremny w koło wpisany, a przeciąwszy na dwie równe części łuk, którego cienciwą iest bok tego Wielokąta, i od punktu każdego takiego przecięcia poprowadziwszy liniie do dwóch końców łuku, zrobi się z tych linii inny wielokąt foremny, tyle dwoie co pierwszy boków maiący.

1. Wszystkie boki tego nowego wielokąta będą równe, bo będą cienciwami połowy łuków równych.

2. Wszystkie także kąty tego Wielokąta, będą równe, bo każdy z nich będzie dwa razy większy od kąta przypodstawie Troykątów równoramiennych, i przystać do siebie mogących, które za boki, maią promienie koła.

Ten tedy Wielokąt, będzie miał wszystkie boki i Troykąty równe, a zatym będzie foremnym.

Podobnym sposobem dowieść możnaby, że ieżeli boki Wielokąta, są cienciwami tyluż

tyluż części koła, ile Wielokąt ma boków, ten Wielokąt będzie foremnym; a zatym wykreślenie Wielokąta foremnego, któryby zamykał w sobie pewną liczbę boków danych, zależy od tego, aby podzielić okrąg koła na daną liczbę części równych.

263. *Zagadn.* Na danym kwadracie opisać, i wpisać weń koło; i znowu w dane koło wpisać, i opisać na nim kwadrat.

Rozwiąz: 1. Prowadzę dwie przekątne w kwadracie; punkt przecięcia ich, będzie środkiem koła, które wpisać w kwadrat, i opisać na nim mamy.

2. Prowadzę dwie średnie w kole, iednę do drugiey prostopadłą. Końce ich będą wierzchołkami kwadratu wpisać się w koło mogącego; przez te wierzchołki pociągnąwszy styczne koła, te zrobią kwadrat na kole opisany.

264. *Wniosek* 1. Kwadrat opisany na kole, równa się kwadratowi średnicy iego, i dwa razy iest większy od kwadratu wpisanego.

265. *Wniosek* 2. Z tego co się wyżey powiedziało, wynika, że przez *podziały*, (sub-

(ſubdiviſiones) ciągłe łuków na dwie części równe, można wpiſać wkoło Wielokąty, których liczba boków byłaby następuiąca.

3, 6, 12, 24, 48, 96, albo w ogulności.

- - - - - $3 \times 2^{n.}$ (x)

4, 8, 16, 32, 64, 128, albo w ogulności.

- - - - - $4 \times 2^{n.}$

Przeſtr. Za pomocą ſamego liniału i Cerkla, nie można z zupełną dokładnością i pewnością, (to ieſt bez ſzukania takowego podziału cerklem) podzielić łuk każdy na 3, 5, 7, i t. d. części równych; a zatym z takową ſamą pomocą, nie można zawſze wykreślić takie Wielokąty, których liczba boków wyrażałaby ſię przez liczby rozmnożne, z 3, lub 4, i t. d. przez 3, raz lub więcey razy wzięte.

266. *Twierd.* 5. Powierzchnia Wielokąta opiſanego na kole, a wſzegulności Wielokąta foremnego równa ſię Troykątowi maiącemu za wyſokość promień tego

---

(x) *Co znaczą te wyrazy:* 3×2^{n}, 4×2^{n}, *da ſię poznać w Algebrze.*

tego koła, a za podstawę *obwod* (Perimeter) tego Wielokąta.

Wykreśl. Od środka koła poprowadźmy liniie do wszystkich wierzchołków Wielokąta.

Dowodz. Wielokąt podzielony będzie przez te liniie, na tyle Troykatów, ile ma boków; Troykąty zaś te maią za wysokość promien koła, a za podstawę boki Wielokąta; więc powierzchnia tych wszystkich Troykątów, czyli powierzchnia Wielokąta, równa iest iednemu Troykatowi, któryby miał za wysokość promień tego koła, a za podstawę obwod Wielokąta.

267. *Wnioſek.* Gdy rozmaite Wielokąty opisane są na iednym kole; ich powierzchnie mieć się do siebie będą, iak obwody.

268. *Twierdzenie* 6. Powierzchnia Wielokąta foremnego, w koło wpisanego, równa się Troykątowi, maiącemu za wysokość promień tego koła, a za podstawę, obwod wielokąta innego foremnego w toż koło wpisanego, a tylko połowę tyle boków maiącego.

Nie-

Niechay naprzykład sześciokąt ABCD EF, wystawia nam iakikolwiek Wielokąt foremny, w koło wpisany, powierzchnia tego sześciokąta równa iest Troykątowi, maiącemu za wysokość promień tego koła, a za podstawę obwód Troykąta równobocznego, wtoż samo koło wpisanego. *Fig.* 1.

Dowodz. Poprowadźmy promień SB przecinaiący w punkcie G, bok Troykąta równobocznego. Troykąt ASB, uważać można, iak gdyby miał podstawę SB, a wysokość AG, Troykąt także CSB uważać można, iak gdyby miał podstawę SB, a wysokość CG; a zatym czworokąt AS CB równa się Troykątowi, któryby miał albo wysokość AC, a podstawę SB. Toż mowić i o innych Czworokątach, zawartych między dwoma Wielokąta bokami przyległemi, i dwoma promieniami; summa więc powierzchni, wszystkich tych czworokątów, to iest powierzchnia Wielokąta foremnego w koło wpisanego, równa się takiemu Troykątowi, któryby miał za wysokość promień tego koła, a za podstawę obwód Wielokąta innego foremnego, w toż koło wpisanego, a połowę tyle bokow maiącego.

Przykład. Powierzchnia Dwunastokąta foremnego w koło wpisanego, równa się

ſię Troykątowi, maiącemu za wyſokość, promień tego koła, a za podſtawę obwód ſzkściokąta, w toż koło wpiſanego, albo, (co na iedno wychodzi) równa ſię Proſtokątowi, któryby miał za wyſokość, promień tego koła, a za podſtawę, tenże promień, trzy razy wzięty.

Ta więc powierzchnia ieſt trzy razy większa od kwadratu promienia, i ieſt równa $\frac{3}{4}$ kwadratu średnicy.

Twierdzenie to ſtoſuie ſię tylko do Wielokątów, których boki ſą parzyſte; naſtępuiące Twierdzenie przyſtoſować można do wſzyſtkich ogulnie Wielokątów foremnych.

269. *Twierdz.* 7. Powierzchnia Wielokąta foremnego w koło wpiſanego, równa ſię Troykątowi, maiącemu za wyſokość proſtopadłą ſpuſzczoną od środka koła do boku wielokąta, a za podſtawę, obwod iego. (y)

Dowodz. Proſtopadłą tę uważać można, iak promień koła wpiſanego, lub wpiſać

(y) *Taka w ſzczególności proſtopadła nazywa ſię z Greckiego apothema.*

fać się mogącego w Wielokąt; a zatym twierdzenie to iest tylko przystosowaniem wyższego (267.)

270. *Wniosek.* Jeżeli od punktu iakiegokolwiek w Wielokącie foremnym, nawet i w tym, którego boki tylko wszystkie są równe, spuściemy prostopadłe do wszystkich iego boków, te prostopadłe dodane do siebie, iednakową zawsze długość uczynią.

Iakoż poprowadziwszy od tego samego punktu dwie liniie do dwóch końców iednego z boków, powierzchnia Troykąta, temi liniiami zakończona, równa będzie Troykątowi maiącemu za podstawę bok wielokąta, a za wysokość prostopadłą nań spuszczoną; albo co na iedno wychodzi; powierzchnia ta równa będzie Troykątowi maiącemu za wysokość bok Wielokąta, a za podstawę, prostopadłą nań spuszczoną; a zatym powierzchnia całego Wielokąta równać się będzie Troykątowi, któryby miał za wysokość bok tego Wielokąta, a za podstawę summę wszystkich prostopadłych na boki iego spuszczonych. Aże powierzchnia takowego Troykąta iest zawsze iednakowa, i wysokość także iednakowa, więc i podstawa, czyli summa wszystkich prostopad-

ſtopadłych iednakowa zawſze będzie, z któregokolwiek punktu Wielokąta, one ſpuściemy.

WSTĘP DO ROZDZIAŁOW XI. i XII.

O używaniu Przenośnika, Cerkla proporcyanalnego, i o Podziale nazwanym Nonniuſzem.

Tab. XVI. 271. *Def. Przenośnik* (Transportator) ieſt to połkole, którego okrąg podzielony ieſt na ſtopnie, albo, gdy większy będzie, na puſtopnie, i cwierci ſtopniów.

272. *Zagadn.* 1. Maiąc dany kąt na papierze, znaleść liczbę ſtopniów, którą w ſobie zamyka.

Spoſob 1. Przykładam środek przenośnika do wierzchołka kąta danego, a podſtawę tegoż przenośnika do iednego z ramion kąta; łuk przenośnika zawarty między ramionami kąta, pokaże w ſtopniach ważność iego.

Spoſob 2. Od wierzchołka kąta danego, iak od środka, promieniem równym pro-

promieniowi przenośnika, kreślę łuk zawarty między ramionami kąta, odległość dwóch końców tego łuku przenoszę cerklem na okrąg przenośnika, od końca średnicy, która mu służy za podstawę; łuk przenośnika między końcem średnicy i drugim punktem, gdzie drugie ramie Cerkla przypadnie, zawarty, pokaże w stopniach ważność kąta danego.

273. *Zagadn.* 2. Na linii daney, i przy punkcie na niey danym, zrobić kąt zawieraiący w sobie daną liczbę stopniów.

Sposob 1. Położywszy na linii daney przenośnik, tak, aby średnica iego, do tey linii przystawała, a środek do punktu danego, naznaczam na papierze punkt, któremu odpowiada punkt przenośnika ukazuiący liczbę daną stopniów, ten punkt łączę liniią z punktem danym, a ta liniia uczyni z daną kąt, którego szukałem.

To działanie będzie dokładnieysze, gdy przenośnik ma sobie przydany promień ruchomy około środka iego.

Sposob 2. Od punktu danego; iak od środka, promieniem równym promieniowi przenośnika, kreślę łuk, i na ten, wzięty

wziętą na przynośniku liczbę ſtopniów danych przenoſzę, od punktu przecięcia linii z tym łukiem, aż do drugiego punktu na tymże łuku. Punkt ten oſtatni złączywſzy linią z puktem danym na drugiey linii, te obiedwie liniie zamykać będą kąt, którego ſzukałem.

274. *Zagadn.* 3. W danekoło, wpiſać Wielokąt foremny o pewney liczbie boków.

Rozwiąz. Szukam kąta w środku tego Wielokąta; ciągnę promień iakikolwiek, i robię na nim kąt równy kątowi w środku Wielokąta, maiący środek koła danego za wierzchołek; łuk tego koła zawarty między ramionami kąta, będzie miał za cięciwę bok Wielokąta danego.

275. *Zagad.* 4 Na daney linii wykreślić Wielokąt foremny o pewney liczbie boków.

Rozwiąz. Przy dwóch końcach daney linii robię dwa kąty równe połowie kąta, przy obwodzie Wielokąta, którego ſzukam. Punkt przecięcia ramion tych dwóch kontów będzie środkiem koła, w które wpiſać ſię da Wielokąt, o tylu bokach, ile ich dano, i tey wielkości, iakiey ieſt liniia dana.

276. *Uwaga.* Używanie przenośnika, wyciąga wielkiey baczności. Im większy promień mieć będzie, tym mniey obawiać się trzeba znacznieyszego iakiego uchybienia.

Między innemi narzędzia tego niedoſtatkami, ieſt ten mianowicie, że promienia w nim odmienić nie można według okoliczności; ale ten niedoſtatek zaſłąpić może w potrzebie inne narzędzie nazwane *linią cienciw* (Linia chordarum) w cerklu proporcyonalnym.

277. Na obydwóch ramionach cerkla proporcyonalnego, znayduie się *linia cienciw*, którey podziały zaczynaią się w środku (in centro) tego narzędzia; a miara tam, gdzie ieſt liczba: 180, albo w mnieyſzych narzędziach tam, gdzie ieſt liczba 60. Odległości środka od innych punktów podziału, pokazuią wielkość cienciw wyznaczoną przez *rachunek* (per calculum) albo przez figurę dokładną. Ta wielkość cienciw wyznaczona ieſt w połkole, którego promień równa ſie odległości środka cerkla proporcyonego od punktu podziału naznaczonego liczbą 60; a to z przyczyny równości cienciwy 60; ſtopniów z promieniem. *Tab. XVII.*

Ponieważ rozwiązanie czterech poprzedzaiących zagadnień iedynie zawisło od wyznaczenia cienciwy łuku, to iest od wielkości iey względem promienia; można więc cztery te Zagadnienia rozwiązać, używaiąc, iednego tylko ramienia w cerklu proporcyonalnym, biorąc za promień koła odległość punktów: 6, i 60.

Dwa razem ramiona tego cerkla służą do odmienienia promienia; naymnieyszym będzie, odległość dwóch punktów 60. i 60. gdy Cerkiel proporcyonalny zupełnie iest zamknięty; powiększonym zaś będzie przez odległość większą tychże punktów, gdy cerkiel coraz więcey otworzemy; a naywiększym będzie, gdy cerkiel cale tak otworzemy, że ramiona iego w prostey będą linii.

Niechby naprzykład tak był otworzony cerkiel proporcyonalny, aby odległość dwóch punktów 60. i 60, czyniła połowę odległości iednego z tych punktów, od środka; będzie też i odległość drugich punktów odpowiadaiących sobie naprzykład 40 i 40, połową odległości iednego z nich od środka; a zatym odległość ta punktów: 40, i 40, oznaczyłaby cienciwę stopniów 40, albo 40°, w kole, którego promień równałby się odległości punktów

któw 60 i 60; bo cienciwy łuków podobnych, w kołach różnych tak się mają do siebie, iak tychże kół promienie. W ogulności więc mowiąc: gdy za promień wezmiemy odległość punktów 60. i 60, na linii cienciw, iakażkolwiek inna odległość dwóch punktów na teyże linii, naznaczonych iednakową liczbą, będzie cienciwą łuku, o tylu stopniach, ile wyraża ta liczba.

Ztąd wynika sposob, którego użyć wygodnie można, chcąc rozwiązać cztery poprzedzaiące zagadnienia, przez liniią cienciw, i odmieniaiąc iak się podoba promień.

278. *Przykład* 1. Na daney linii i przy punkcie na niey, także danym zrobić kąt o pewney liczbie stopniów.

Rozwiąz: Weźmy iakikolwiek promień; otworzmy cerkiel proporcyonalny tak, aby odległość punktów naznaczonych liczbą 60, była równa temu promieniowi. Od punktu danego, iak od środka, promieniem tymże nakreślmy łuk koła, i daymy mu cienciwę równą odległości dwoch punktów naznaczonych liczbą daną stopniów.

279. *Przykł.* 2. Na daney linii wkreślić Wielokąt foremny iakikolwiek.

Rozwiąz. Szukaymy kąta, iaki być powinien w środku Wielokąta żądanego; otworzmy cerkiel proporcyonalny tak, aby odległość punktów naznaczonych na linii cienciw tą liczbą, iaka iest liczba ſtopniów kąta, w środku, Wielokąta, równała ſię linii daney; na teyże linii wyſtawmy Troykąt równoramienny, dawſzy mu za ramiona, liniie równe odległości punktów naznaczonych liczbą 60; wierzchołek tego Troykąta, będzie środkiem koła, w które wpiſać można Wielokąt żądany.

280. *Uwaga.* Co do wykreślenia Wielokątów foremnych w ſzczególności: aby ſię obeyść można bez ſzukania kątów w środku, znayduie ſię na cerklu proporcyonalnym oſobna liniia Wielokątów, za którey pomocą, zacząwſzy od Troykąta, lub Czworokąta, aż do dwónaſtokąta, wykreślić można. Odległość środka, tego narzędzia, od punktu 6. tey linii Wielokątów, wziąwſzy za promień, albo za bok Sześciokąta foremnego w koło wpiſanego, odległości, tegoż środka od punktów: 3, 4, 5, i t. d. pokażą wielkość boku Wielokąta foremnego, który wpiſać

fać można w to samo koło, o tylu bokach, ile znaczą liczby: 3, 4, 5, i t. d. *Albo też*: otworzywszy do woli cerkiel proporcyonalny, i wziąwszy na linii Wielokątów za promień, odległość punktów 6, i 6; odległości innych dwóch punktów: 3, i 3; 4, i 4; 5, i 5; i t. d. pokażą bok Wielokąta foremnego o teyże samey liczbie boków wpisanego w to koło, do którego za promień wzieliśmy odległość punktów 6 i 6.

281. Trzecia liniia, którą na cerklu proporcyonalnym znayduiemy, a wielkiego iest użytku, nazywa się *liniią częściów równych*. Na obydwóch cerklu proporcyonalnego ramionach, mamy liniią podzieloną na 200. części równych, a czasem, gdy cerkiel mnieyszy, na 120, mniey lub wiecey. Jakożkolwiek ten cerkiel otworzemy, odległość dwoch Punktów naznaczonych tą samą liczbą naprzykład 200, będzie dwa razy większa od odległości punktów naznaczonych liczbą 100, cztery razy większa od odległości dwoch punktów, 50; i t. d. a mówiąc ogulnie: odległość dwóch iakichkolwiek punktów tą samą liczbą naznaczonych, będzie się tak miała do odległości dwóch innych punktów przez iednakową także liczbę naznaczonych; iak się mają do siebie też liczby.

282.

282. *Używanie* 1. Maiąc daną liniią pòdzielić ią na pewną liczbę części równych.

Niechby naprzykład podzielić trzeba liniią daną na 5 części równych,

Otworzmy tak cerkiel proporcyonalny, aby odległość punktów naznaczonych liczbą podzielną przez 5, równa była linii daney; niech naprzykład odległość ta będzie punktów naznáczonych liczbą: 200; weźmy piątą część tey liczby, to ieſt 40, a odległość tych dwóch punktów naznaczonych liczbą 40: będzie częścią piątą linii daney.

283. *Uwaga.* Oſtatnią tę odległość znalezioną przenoſząc 5 razy na liniią daną, uchybienie któreby zayść mogło w iey wielkości, byłoby 5 razy powtorzone, a zatym tak powtorzone, mogło by ſię ſtać znacznym, chociaż każde z oſobna było nieznaczne. Przytrafić ſię to może oſobliwie w ten czas, gdy na wiele części dzielić przychodzi liniią. Aby więc tego powtarzania uniknąć, lepiey będzie wziąść oſobno $\frac{1}{5}$ linii, to ieſt odległość dwóch punktów: 160, i przenieść ią, od obydwoch końców na liniią daną, toż uczynić, wziąwſzy potym $\frac{1}{5}$. linii i t. d.

284. *Używanie* 2. Maiąc daną liniią znaleść inną, któraby do niey była w pewnym ſtoſunku, w liczbach wyrażonym naprzykład iak 4 do 7.

Przenieśmy liniią daną na dwa punkta, naznaczone liczbą podzielną przez 7, naprzykład na dwa punkta: 140; $\frac{4}{7}$ tey liczby 140, ſą 80; odległość tych dwóch punktów: 80, będzie liniią, którey ſzukaliśmy.

285. *Uważanie* 3. Maiąc dane w liczbach trzy boki Troykąta, wykreślić go.

Przykład. Niechby trzy boki Troykąta miały być, iak trzy liczby: 150, 147, 128.

Otworzmy iakokolwiek cerkiel proporcyonalny: odległości dwóch Punktów: 150. dwóch punktów: 147, i dwóch punktów 128, będą do ſiebie, iak boki dane; a zatym mogą być wzięte za te boki.

286. *Używanie* 4. Maiąc dany Troykąt iuż wykreślony, którego podſtawa zamyka naprzykład 100. ſznurów, znaleść wielkość innych dwóch boków.

Przenieśmy podſtawę daną na dwa punkta: 200; zmierzmy cerklem długość dwóch

dwóch innych boków, i przenieśmy ią znówu na punkta dwa iednakową liczbą naznaczone, tam gdzie przypadnie; liczby dwie, na które długość tych dwóch boków przypadnie, wyrażać będą długość tychże boków w sznurach.

Opuszczam inne używania, gdzie wykreślenie Geometryczne, krótsze iest często, i pewnieysze; iak naprz: w znalezieniu kwadratu, równego summie dwóch innych danych, albo więcey.

287. *Uważ*: 1. Gdy kto nie ma cerkla proporcyonalnego, może na mieysce iego, a czasem i lepiey użyć linii podzieloney na wiele części równych.

288. *Uwa*: 2. Gdy część naymnieysza, którey nam do podziału potrzeba, iest bardzo mała, a liczba części których szukamy znacznie wielka; w takim razie trudno iest mieć wszystkie, na teyże samey linii, podziały, tak aby ie dobrze rozeznać można. Udamy się więc w podobnym razie do sposobu następuiącego:

Tab. XV. Fig. 4. Niechby podana była liniia, która zbyt iest mała, aby ią widocznie na 10, części podzielić można; trzeba osobno te części wynaleść od 1, aż do 10.

Roz-

Rozwiąz. Przez dwa końce tey linii prowadzę, po iedney ſtronie dwie równoodległe. Na te równoodległe przenoſzę od końców linii daney dziefięć równych części; każdy Punkt podziału w iedney równoodległey, łączę liniią z punktem odpowiadaiącym mu na drugiey równoodległey. (Te liniie łączące będą równoodległe od linii daney) Od końca iednego linii daney, ciągnę liniią poprzeczną do końca drugiego linii oſtatniey równoodległey od daney; Ta poprzeczna liniia wyznaczy na równoodległych od linii daney, części których ſzukałem.

Maiąc daną liniią bardzo małą, do podzielenia na 100, równych części, ale iednak tak wielką, aby mogła być widocznie podzieloną na 10, równych części; podzielić ią tak, aby tyle zaraz części równych wyznaczyć na niey można, ile zechcemy, zacząwſzy od 1, aż do 100. *Fig.* 5.

Rozwiąz. Podzielmy tę liniią na 10. równych części; przez pierwſzy punkt podziału, y przez drugi koniec tey linii, wyciągniymy dwie równoodległe iakiekolwiek, (zręczniey iednak, i wygodniey ieſt, aby mało co od proſtopadłych uchybiały:) Przenieśmy znowu na te dwie równoodległe 10, części, równych, albo mało różniących ſię od części linii daney.

Złą-

Złączmy drugi koniec linii daney, od którego nie była prowadzona równoodległa, z ostatnim punktem podziału równoodległey bliższey; złącz my także i punkta iedney równey odległey z punktami odpowiadaiącemi na drugiey, i przeciągniymy ie aż do linii ostatniey nie równoodległey. Nakoniec przez wszystkie punkta podziału linii daney prowadźmy równoodległe od dwóch pierwszych równoodległych, co z łatwością przyidzie, przeniosszy podziały linii daney, na liniią iey przeciwną i łączącą końce dwóch pierwszych równoodległych, i złączywszy liniiami punkta podziału odpowiadaiące. Po takim wykreśleniu, mieć zaraz można tyle co chcemy części równych na linii daney, zacząwszy od 1. aż do 100.

Trzeba naprzykład znaleść nam części 64. takich, iakich liniia dana ma 100.

Stawmy ramie iedne cerkla zwyczaynego na punkcie średnim, 4. i otworźmy cerkiel tak szeroko, aż drugie ramie iego przypadnie na przecięcie dwóch linii, których końce naznaczone są liczbami: 4 i 60. Ta otwartość cerkla, da nam liczbę części, których szukaliśmy, i t. d.

Przedłużaiąc liniią daną, i wszystkie od niey równoodległe, aż poki te przedłu-

że-

żenia nie będą równe linii daney wziętey raz, dwa razy, trzy razy -- dziesięć razy, otrzymamy taką liczbę części, iaką zechcemy, założywszy od 1, aż do 200, 300, 400. -- 1000.

Taka *podziałka* (scala) iest do używania naywygodnieysza, gdy kto nie ma cerkla proporcyonalnego, dla tego też inaywięcey iey używaią.

289. Inny sposob do wynalezienia części równych linii daney, tak małey, że iey podzielić widocznie nie można na części żądane, iest ten, który się nazywa *podziałem Nonniusza*, a który raczey nazywać by się powinien podziałem *Verniera*, z przyczyny, że tak zwał się prawdziwy podziału tego wynalazca.

Niechby naprzykład przyszło podzielić na 30 równych części linią tak małą, że widocznie na niey części, tych wyznaczyć nie można, niechby iednak była wielkości, że można ią wyraznie podzielić na 5, albo 6, części równych.

Podzielmy te linią naprzykład na 6. części równych, i drugą iey równą, na 5 równych także części. Rożnica szostey części pierwszego podziału, od piątey części dru- *Fig. 6.*

drugiego podziału, będzie równą różnicy między $\frac{1}{7}$ i $\frac{1}{8}$ częścią całey tey linii daney, to iest będzie $\frac{1}{56}$ tey linii. Gdy tedy te dwie liniie tak ułożemy, że iedna będzie przy drugiey, i końce iedney wprost będą na przeciwko końców drugiey; odległość dwóch punktów pierwszego podziału w obydwóch liniach, będzie 30stą częścią daney linii; podobnie odległość dwóch punktów drugiego podziału (rachuiąc od tychże samych, co wyżey końców) będzie: $\frac{2}{56}$; odległość dwóch punktów trzeciego podziału: $\frac{3}{56}$, czwartego: $\frac{4}{56}$, piątego: $\frac{5}{56}$, albo $\frac{1}{8}$. stą częścią całey linii daney; to iest iedną z tych części, na które ta liniia iest podzielona.

Tab. XVII. 290. Czwarta liniia, która ieszcze zwykła się znaydować na cerklach proporcyonalnych, i którey wykreślenie zasadza się na tym; co się wyżey iuż wyłożyło, nazwana iest *liniią Płaszczyzn* (linea Planorum).

Odległości środka w cerklu proporcyonalnym od punktów podziału tey linii, tak się maią do siebie, iak boki kwadratów, które w tym samym stosunku byłyby do siebie, w którym są liczby przy tychże punktach wyrażone. Y tak gdyby kwadrat ieden był: 4, 9, 16, 25, 36, 49,

49, 64, razy większy od drugiego; bok tego drugiego kwadratu większy byłby: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 razy od pierwszego; dla tego też odległości od środka, punktów naznaczonych liczbami: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, tak się maią do siebie, iak liczby: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Szczupłość narzędzia nie pozwoliła daley tych podziałów rozciągnąć. Co się zaś tycze boków w kwadratach średnich między temi, które się dopiero wyraziły; można ie wyznaczyć przez figurę dokładną, lub przez rachunek przybliżaiąc ich ważność do prawdziwey. Y tak ieżeli odległość środka od punktu: 1, będzie wyrażać bok kwadratu równy naprz: 12 iakim częściom; odległość tegoż środka od punktu: 2; wyrazi bok innego kwadratu równy bliſko 17. takimże częściom; albo gdy pierwsza odległość znaczy nap: 100, druga znaczyć będzie troche więcey iak 141, i t. d.

Używanie w tym, dwóch ramion cerkla proporcyonalnego, iest to samo, które było i do innych linii.

Ponieważ naprzykład odległości środka od punktów:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 62,
mają się
Do siebie, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8;
iak liczby: - - - więc też

i odległości dwóch punktów iednakową liczbą nazczonych:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64,
Przy iakim-
kolwiek o- - - - -
twieraniu - - - -
cerlka, mieć - - - -
się będą iak - - - -
liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,

Toż mowić i o innych liczbach pośrednich.

Pryyſtoſowanie Niech będzie dany bok kwadratu iednego; trzeba znaleść bok innego kwadratu, któryby był $\frac{5}{6}$, pierwszego.

Otwieram tak cerkiel proporcyonalny, aby dwa ramiona cerkla zwyczaynego, z otwartością równą bokowi danemu, przypadły na dwa punkta Linii płaſzczyzn, iednakową liczbą naznaczone, któraby podzielona być mogła przez 6; naprzykład na dwa punkta: 60. Biorę $\frac{5}{6}$. tey liczby 60, to ieſt: 50; i nie odmieniaiąc otwarcia cer-

cerkla proporcyonalnego, mierze odległość dwóch punktów: 50; a ta będzie linią którey szukśm za bok kwadratowi, maiącemu być $\frac{1}{8}$, kwadratu danego; aże figury podobne maią się do siebie, jak kwadraty ich boków odpowiadaiących sobie, przeto działanie to przystosować równie można do wszystkich figur podobnych.

ROZDZIAŁ XI.

Pierwsze początki Miernictwa.

JEżeli gdzie nauka o figurach podobnych używana bywa w praktyce, to szczególniey gdy się wykreślaią na papierze figury, choć w małości swoiey, podobne tym, których są wyobrażeniem; i gdy wyznaczamy na karcie położenie punktów na polu naprzykład znayduiących się, których tam dla różnych zawad wyznaczyć częstokroć nie można.

291. *Przykład* 1. Niech będzie izba kwadratowa, którey bok zmierzony, ma łokci 10.

Jakieykolwiek wielkości kwadrat odrysuiemy na papierze, zawsze iego figura, podobną będzie do figury izby.

Zeby

Zeby iednak patrząc na kwadrat na papierze odryſowany, można ſobie wyſtawić wielkość tey iżby trzeba położyć ioznaczyć *Podziałkę*, według którey bok iżby przenieśliśmy na papier: bo inaczey zapatruiąc ſię na ten oſtatni kwadrat, poznalibyśmy, tylko iaka ieſt figura izby, a nie wiedzieli ieſzcze; iaka iey wielkość.

Gdyby ta izba była proſtokątem, maiącym długość łokci naprzykład 12, a ſzerokości łokci 8; odryſowawſzy na papierze iakikolwiek proſtokąt, którego dwa boki miałyby ſię do ſiebie, iak 12, do 8; ten proſtokąt podobny do izby, wyſtawiłby nam iey figurę, ale nie wielkość; która dopiero w ten czas byłaby poznana; gdyby ſię wyraziło, w iakim mierze to przenieſienie boków izby na papierze ſtało ſię, czyli to przypiſuiąc do boku odſowanego, że łokci 12, ukazuie, czyli oznaczaiąc iaka ieſt długość na papierze wyrażaiąca łokci 10, i t. d.

Mierząc podobnie długość i ſzerokość domow, dziedzinców, ulic grubość murów i t. d. można wyrazić na papierze wſzyſtkie te. iedne względem drugich położenia i wielkość każdey z oſobna części nap: budynku i t. d.

Można

Można potym i drobnieyſze części wyrazić, kładąc położenia drzwi, okien, i t.d. aby pod ieden razem widok poddać budynek cały i z iego częściami.

Kilkakrótnie takowe roboty czyniąc, nabędą w nich Uczniowie coraz większey łatwości.

292. *Przykład.* 2. Niech będzie na polu Troykąt, którego, boki wſzyſtkie zmierzyć można; ieden z tych boków zawiera łokci: 180, drugi: 164, trzeci: 148.

Zróbmy iakąkolwiek podziałkę, i według niey zróbmy Troykąt, którego trzy boki zawierałyby liczbę części równych z tey podziałki ieden: 180, drugi: 164. trzeci 148. Ponieważ ten mały Troykąt ma boki w tym ſamym ſtoſunku, w którym ſą boki Troykąta wielkiego, na polu naprzykład wymierzone; niczym więc od wielkiego Troykąta różnić ſię nie będzie, tylko ſamą wielkością; a zatym będzie nam go mogł wyobrazić, i da nawet poznać ſamę wielkość iego, gdy na papierze wyraziemy podziałkę, którey do tego użyliśmy.

293. *Uwagi.* W oſtatnim przykładzie, długości do mierzenia, były przywiększe,

a przeto gdybyśmy używali w takim razie krótkiey iakiey miary, naprzykład łokcia, robota, byłaby długa, i bardzo pracowita; a nadewszystko uchybienia, małe, których się ciężko uchronić, w przykładaniach następnych miary, zebrane razem, uczyniłyby omyłkę tym znaczniey szą, im częściey byłyby powtorzone. Ztego powodu, wniosło się używanie sążni, prętów, a nawet i sznurów, na mieysce łokci.

Do wymiarów tedy długości znaczniey szey, należy mieć sznur, a ieszcze lepiey łańcuch, który pewną liczbę łokci albo sążni w sobie zamyka. Daymy naprzykład, że łańcuch którego używamy, ma w sobie 10, sążni. Takowy łańcuch, do długości 180, łokci, przyłożyć trzeba następnie sześć tylko razy, a już cała ta długość będzie wymierzona; będzie zatym wymiar i prędszy i pewnieyszy. W takowych wymiarach wielkiey baczności potrzeba.

1. Należy być zapewnionym, że miary brane są w linii prostey.

Tym końcem rozstawuią się żerdzie, w pewney od siebie odległości, i w tey linii, którą mierzyć przypada, tak; aby pierwsza żerdź zasłaniała następuiące, a osobliwie drugi koniec linii do mierzenia:

trzeba

trzeba także te żerdzie ustawić prostopadle (z) używaiąc do tego *Pionu* (Perpendiculum.)

2, Jeżeli na końcu linii do mierzenia nieznayduie się iaki cel znaczny, naprzykład drzewo, rog domu, i t. d. trzeba tam osobliwie gdy długość iest bardzo wielka, wystawić znak iaki, naprzykład żerdź wysoką z chorągiewką, z tablicą białą na wierzchu, lub z innym podobnym znakiem.

3. Trzeba ieszcze uważać, aby przykładania następne miary, były w linii prostey; według drogi od żerdziów wyznaczoney. Przeto ten, co trzyma pierwszy koniec łańcucha lub sznura, powinien się postawić wprost żerdziów, i dać znak drugiemu trzymaiącemu drugi koniec, aby i ten wprost niego stanął w teyże samey linii; albo znowu trzecia osoba, stoiąc przy końcu iednym linii do mierzenia, przestrzegać będzie, i uważać przykładaiących miarę, aby z linii prostey nieschodzili.

S2 4.

(z) *Liniią prostopadłą do iakiey płaszczyzny*, poziomey (*horizontalis*) *nazywać będziemy* Pionową (*verticalis*)

4. Trzeba ſię ſtarać, aby przy każdym przykładaniu miary, łańcuch, lub ſznur, iak naybardziey był wyciągniony; dlatego należy go do ſamey ziemi przyſtawiać, ieżeli ta równa ieſt wſzędzie; albo też wſpierać go na podporach w pewney odległości rozſtawionych; a tym ſpoſobem nachylenie, które ciężar łańcucha, lub ſznura ſprawuie, będzie mniey znaczne.

Y dla tegoć to, w robotach wielkiey wagi, i oſobliwey dokładności wyciągaiących, łańcucha, ani ſznura używać nie można.

5. Trzeba ieſzcze mieć baczność, aby do tego ſamego mieyſca, gdzie ſię miara iedna ſkończyła, przykładać znowu koniec ſznura, lub łańcucha. Dla tego należy dla znaku wbić zaraz żerdkę lub koł. w to mieyſce, w którym ſię miara przeſzła zakończyła, a naſtępuiąca ma ſię zaczynać.

6. Trzeba dobrze pamiętać, ile razy ſię łańcuch, lub ſznur w całym wymiarze przykładał; i aby o tym dla iakiego roztargnienia nie zapomnieć, lepiey ieſt za każdym razem naznaczyć ſobie to przykładanie, albo na karcię, albo wtykaiąc na końcu każdego wſzczegulności wymiaru, znak iaki.

7.

7. Bespieczniey także iest, powtorzyć zawsze wymiar całey długości.

8. Jeżeli pole do wymierzenia całe iest otwarte, i wolne, można go podzielić na Troykąty; czyli to prowadząc wszystkie przekątne od iednego rogu, czyli biorąc bok ieden, za spolną podstawę tylu Troykątów, ile będzie pozostałych rogów; czyli iefzcze wyznaczaiąc punkt w samym polu, i uważaiąc go iak wierzchołek, albo raczey zbieg tylu Troykątów, ile figura, którą odrysować chcemy, ma boków. Zmierzywszypotym wszystkie boki wszystkich tych Troykątów, można będzie odrysować na papierze figurę podobną.

294. *Przestroga.* Ten sposob postępowania, w odrysowaniu pola, mierząc w istocie wszystkie liniie do tego potrzebne; i czasu wiele zabiera, i rzadko nawet trafia się, aby pole tak było wolne, żeby na nim sposobu tego użyć można.

Innych zatym użyć trzeba w tym razie sposobów, które się tu przytoczą, zaczynaiąc od łatwieyszych i prostszych; Postrzedz tu łatwo będzie można, iż używanie sposobów trudnieyszych i bardziey zawikłanych, nie zawisło od prawideł Geometrycznych, których grunt tenże

amf

ſam ieſt zawſze i iednakowa dokładność, ale zprzyczyny niedoſkonałości zmyſłów naſzych, i ręcznych działań.

295. *Zagadn:* Znaleść iakiego celu odległość nie mierząc iey *bezśrednie* (imediatè) czyli nie udaiąc ſię wproſt, aż do ſamego celu.

Sposob 1. W którym ſamych ſię tylko żerdzi lub kołów używa.

1. Wymierzmy podſtawę iaką, któraby ſię ziedney ſtrony kończyła na punkcie, od którego odległość celu chcemy wiedzieć. Ta podſtawa (dla większey w praktyce dokładności) powinna być tym dłużſza, im odległość celu, okiem miarkowana, zdaie ſię być znaczniey ſza. Dla teyże w praktyce dokładności, trzeba ieſzcze takie położenie wybrać tey podſtawie, aby proſtopadła, którąby do niey od celu ſpuścić można, iak naybliżey iey środka przypadła; ponieważ ze wſzyſtkich innych teyże długości podſtaw, podſtwa z takim położeniem ieſt naywygodnieyſza.

2. Wytknieymy kołami uſtawionemi od obydwóch podſtawy końców, dwie liniie, ku celowi, którego ſzukamy, prowadzące.

3.

3, Zmierzmy od iednego końca podſtawy, dwie iakiekolwiek długości, iednę na podſtawie, a drugą na linii kołami, wyznaczoney; zmierzmy nadto, i odległość końców, tych dwoch długości iuż wymierzonych. Zrobmy to ſamo i z drugiego końca podſtawy.

Maiąc te na ziemi wymiary, możemy na papierze odryſować Troykąt podobny temu, który ma za podſtawę liniią na ziemi wymierzoną, a za wierzchołek, punkt ten, którego odległości ſzukamy.

Jakoż wyraziwſzy na papierze, podſtawę przez liniią iakąkolwiek, można będzie przy obydwóch końcach tey linii odryſować dwa Troykąty, których boki takby ſię miały do ſiebie, iak ſię maią długości na ziemi wymierzone (pod liczbą 3.); a zatym i liniie któreſię ciągneły od końców podſtawy na ziemi, do punktu, którego odległości ſzukamy, będą tak do tey podſtawy nachylone, iak i liniie dwie na papierze, od końców linii wyrażaiącey podſtawę prowadzone, nachylaią ſię do teyże podſtawy.

296. *Przeſtroga* Ten ſpoſób wielkiey bardzo wyciąga baczności, tak w działaniach na ziemi, iako i w przenoſzeniu ich

na

na papier. W tym razie tylko można go użyć, gdy i odległości nie są znaczne, i wielka dokładność nie potrzebna; gdy naprzykład wyobrażenie tylko chcemy sobie uczynić nie znaiomey odległości iakiego celu; wyznaczenie według tego sposobu położenia punktu iakiego niedostępnego, od tego zawisło, aby doyść nachylenia iedney linii wiadomey, to iest podstawy, do dwóch innych, prowadzonych od obywóch końców teyże podstawy, ku punktowi, którego położenia szukamy; ponieważ gatunek Troykąta, temi trzema liniiami zawartego, a zątym i stosunek iego boków iuż wyznaczony będzie przez te nachylenia, *Stolik Geometryczny* (Tabula Pretoriana) i *Kątomierz* (Graphometrum, albo Instrumentum Goniometricum) są to dwa narzędzia szczegulniey używane do wyznaczenia bezśrednie takowych nachyleń.

Sposób 2. Przez stolik Geometryczny.

297. Niebawiąc się nad opisaniem tego narzędzia, i sztuk do niego należących (bo samo rzucenie oka, dopiero używanie, więcey w tey mierze nauczy, niż opis choćby też nayobszernieyszy) przestrzedz tylko, należy, że lepiey iest mieć przy stoliku, gdy kogo stać na to perspek-

ty-

ktywy opatrzone nitkami, w kąt prosty przecinaiącemi się, niżeli proste *Celowniki* (dioptræ) i że tenże stolik ustawić należy *poziemnie* (horisontaliter) iak będzie można nayrówniey, do czego *prawidła* (Alidadæ) *albo* Regulæ (a) z ruchomemi perspektywami, daleko są lepsze, niżeli te, przy których perspektywy lub Celowniki są nie ruchome. (b)

Aby wyznaczyć przez stolik, odległość tę, w którey od iakiego punktu nie dostępnego zostaiemy; powinna do tego wymierzona być podstawa na ziemi, z ostrożnościami wyżey wzmiankowanemi, co do iey położenia i wielkości; trzeba potym postawić stolik na końcu iednym tey podstawy; i wyrazić tam iey długość; i położenie, ato przez liniią kierowaną przez prawidło wzdłuż teyże podstawy ustawione. Nachylenie podstawy do linii

popro-

(a) *Prawidło iedno iest co i liniał; że zaś przy stolikach Geometrycznych, łączy się razem i spaia z celownikami lub Perspektywami, dla tego się odmiennego nazwiska użyło.*

(b) *Celowniki im są wyższe, tym lepsze, bo bez nachylenia, lub podniesienia stolika, można przez nie widzieć Cel iaki na dole, lub w górze wystawiony.*

poprowadzoney od iey końca ku punktowi niedoſtępnemu, wyraziemy na ſtoliku, przez liniią od końca podſtawy wiedzioną przy prawidle, ku temuż punktowi zkierowanym. To zrobiwſzy, przenieſiemy ſtolik na drugi koniec podſtawy, na ziemi wymierzoney, i podobnie ſobie, iak przy pierwſzym końcu podſtawy poſtąpiemy, ciągnąc znowu przy prawidle, liniią od końca drugiego podſtawy na ſtoliku wyrażoney, ku punktowi, którego odległości ſzukamy. Troykąt wykreślony tym ſpoſobem na ſtoliku podobny będzie Troykątowi na ziemi, zamkniętemu między podſtawą wymierzoną, i dwoma bokami, któreby od iey końców prowadzone ſchodziły ſię w punkcie zoſtaiącym w odległości niedoſtępney; a zatym wielkości linii na ſtoliku wykreślonych, i podług podziałki wymierzonych, dadzą nam poznać i wielkości linii odpowiadaiących na ziemi. Y tak niechby naprzykład długość podſtawy na ziemi, była: 200 ſążni, którą wyraża na ſtoliku liniia zamykaiąca w ſobie 200 równych części wziętych z iakieykolwiek podziałki. Jeżeli druga liniia na tymże ſtoliku poprowadzona od końca pierwſzey wyrażaiącey podſtawę, ma w ſobie podług tey ſamey podziałki: naprzykład 180 części, to będzie dowodem, że i liniia odpowiadaiąca iey na ziemi, zawiera 180 ſążni.

298. Używanie ſtolika nie rozciąga ſię, tylko do długości pomiernych. Naywiękſza taka długość, do którey ieſzcze ſtolika użyćby można, nie powinna przechodzić 300, a naywięcey 400, ſążni Szczupłość narzędzia tego, a zatym i linii przez które muſiemy na nim wyrażać liniie uważane na ziemi, czyni uchybienia tym znacznieyſze, im większe ſą te oſtatnie długości. Możemy iednak używać ſtolika, gdy idzie tylko o wyrażenie, na papierze gruntu iakiego nie bardzo rozległego i prawie foremnego; albo gdy tylko wewnętrzne mieyſca gruntu chociaż obſzernego, wyznaczyć potrzeba, którego położenie punktów znamienitſzych, iuż wyznaczone ieſt ſpoſobem dokładnieyſzym; który zaraz wyłożę.

299. *Spoſob 3. przez Kątomierz* (c).

Wyſtawienie przed oczy tego narzędzia, a potym używanie, da go naylepiey poznać. Tę tylko, co i względem ſtolika uwagę przydać należy, że kątomierze z ru-

(c) *Nauczyciele nie maiąc Kątomierza, ukażą Uczniom przenośnik, który małością tylko rozni ſię od Kątomierza, i tym, że nie ma przydanych ſobie prawideł z Celownikami.*

z ruchomemi prawidłami, na płaszczyznie pionowey ustawione, i perspektywami opatrzone, lepsze są od tych, które maią prawidła nie ruchome, zwłaszcza że wiele na tym zawisło, aby kątomierz był zawsze po ziemnie ustawiony; a długie i trudne iest działanie, chcieć przywieść do iedney płaszczyzny na rożnych płaszczyznach uważane.

Kątomierz na to służy, aby przezeń stopniami wyznaczyć kąty, które tylko liniiami na stoliku oznaczone były. Ponieważ zaś narzędzie to bywa małe, tak dla większey wygody, iak i tanności, przeto nie można oznaczyć na iego brzegu podziałów mnieyszych od stopnia; przydaią mu zwyczaynie na to mieysce podział inny, którymsmy wyżey nazwali *podziałem Nonniusza*; aby tym sposobem i minut dochodzić można; przynaymniey do 3. 4, lub 5. według wielkości narzędzia; co dosyć iest w zwyczaynych na ziemi działaniach.

Niechby łuk koła, wzięty na brzegu prawidła ruchomego (który łuk powinien iak naybardziey przystawać do brzegu Kątomierza (i zawieraiący w sobie naprzykład 11. stopniów, podzielony był na 12 części równych; każdy takowy

podział

podział tego łuku zawierać będzie stopień 1, mniey $\frac{1}{12}$, stopnia, to iest mniey 5, minutami; a zatym, gdy dwa podziały, ieden prawidła, a drugi stopnia zeydą się z sobą; odległości pierwszych, drugich, trzecich i t. d. podziałów, wyrażać będą: 5, 10, 15, i t. d. minut. Gdy punkt naznaczony °, w podziale prawidła, to iest punkt odpowiadaiący *Osi* (Axis) prawidła, albo perspektywy schodzi się z podziałem brzegu Kątomierza, liczba stopniów na tym brzegu wyrażona, zupełnie oznacza w stopniach wielkość kąta, który czynią dwa prawidła. Ale gdy ten punkt nieschodzi się z podziałem brzegu, kąt którego szukamy, różnić się będzie 5. 10, 15, i t. d. minutami co do wielkości swoiey, od liczby stopniów wyrażoney przy podziale naybliższym, podług tego iaki będzie podział prawidła czy pierwszy, czy drugi, czy trzeci i t. d. który się zeydzie z podziałem brzegu.

Aby przez Kątomierz wyznaczyć odległość punktu niedostępnego.

Trzeba nayprzod, aby była wymierzona podstawa, położywszy potym Kątomierz, na końcu iednym podstawy, tak aby prawidło nieruchome przypadło na tęż podstawę, celuię drugim prawidłem

rucho-

ruchomym, do punktu, którego położenie chcę wiedzieć. Toż czynię, i na drugim końcu podstawy; a tym sposobem będę miał dwa kąty wiadome przy podstawie.

Pociągnę daley na papierze, iakąkolwiek liniią, którąby podstawę wyrażała, i zrobię przy niey dwa kąty z obustron, równe kątom uważanym na ziemi. Punkt ten, w którym dwa tych kątów ramiona, przecinać się będą, pokaże na papierze położenie punktu, którego szukam, i iego odległość od iednego z końców linii wyrażaiącey podstawę tak się mieć będzie do teyże linii, iak się ma punktu niedostępnego na ziemi odległość, od konca podstawy tamtemu odpowiadaiącego, do samey podstawy. Pierwszy stosunek z podziałki wyznaczony będzie; a zatym wynaydzie się odległość żądana przez proporcyą; którey trzy pierwsze wyrazy będą wiadome; to iest: iak się ma liniia wyrażaiąca podstawę na papierze, do podstawy na ziemi; tak się ma liniia na papierze odpowiadaiąca odległości, którey szukamy, do teyże odległości.

Gdyby dwa takie punkta były niedostępne, których odległości niewiemy; możnaby każdego z nich wszczególności wyzna-

wyznaczyć położenie względem linii wymierzoney, i wziętey za podstawę; tak się albowiem mieć będzie liniia na papierze wyrażaiąca podstawę, do linii wyrażaiącey także na papierze położenia punktów dwóch nie dostępnych; (który to stosunek wiadomy iest z podziałki) iak się ma podstawa na ziemi wymierzona, do odległości na ziemi dwóch punktów niedostępnych.

Jakażkolwiek zgoła byłaby liczba punktów na ziemi, których położenie wyznaczyć chcielibyśmy, nie mierząc wszystkich tych odległości, któremi są te punkta oddzielone; można podobnym iak wyżey sposobem i odległość tę wyznaczyć, i położenie każdego z osobna punktu względem podstawy, z którey dwóch końców wszystkie te punkta widziane być mogą; i według tego wyznaczyć potym na papierze tak położenia, iako i odległości odpowiadaiące tamtym punktom.

Można więc będzie tym sposobem odrysować mappę i obszernieyszey sztuki ziemi, którey punkta do tego potrzebne widzialne są z dwóch iakich innych punktów.

Gdyby zaś nie wszystkie te punkta, których położenia wiedzieć chcemy, były

nie

nie dostępne, można w tym razie przenieść się do dostępnych, i obrać ieden z nich, lub dwa za nowe *punkta stanowiska* (puncta stationis) to iest takie, z których położenie innych punktów, mogłoby być wyznaczone; i znowu wyznaczać położenia tych punktów, które albo z iednego tylko z pierwszych punktów stanowiska, albo z żadnego niebyły widzialne; biorąc zawsze za podstawę odległość dwóch punktów, których położenie iuż wyznaczone iest przez rysunek. Można podobnym sposobem działanie to rozciągnąć, i do odrysowania mieysc obszernieyszych.

Lubo przepisy tu podane, są z siebie dokładne i iasne, atoli w wykonaniu ich, wielkiey baczności przykładać należy; bo inaczey, tym większe będą w rozmiarach błędy, i uchybienia, im odległości do mierzenia podane, są znacznieysze, i działania w nich bardziey zawisłe iedne od drugich. Nie będziemy się tu bawić nad podawaniem drobnieyszych w tey mierze uwag, i służących tym tylko uczniom szczegulniey, których powołanie wezwie w czasie, do pilnowania z Urzędu takowych działań. Znaydą ci bardzo dobre do tego się ściągaiące nauki, w różnych Książkach, między innemi w trzeciey

Księ-

Kſiędze pod tytułem *Inſtitutiones Mathematicæ* przez X. Metzburga. w Wiedniu 1777, wydaney.

300. Tego ſię ſzczegulniey w podobnych rozmiarach ſtrzedz potrzeba, aby, tak te kąty, które uważamy przy punktach ſtanowiſka nie były bardzo oſtre, iako i te, które ſobie wyſtawić w myśli można przy punktach, których położenia ſzukamy, i które zawarte byłyby między dwiema liniiami prowadzącemi od punktów dwóch ſtacyi, do tamtych punktów. Dlatego podſtawa powinna być tym większa, im większa odległość, którey ſzukamy, i położenie punktów takie, aby proſtopadłe od nich ſpuſzczone, ile możności przypadały na podſtawę nie przedłużoną, albo przynaymniey mało co przeciągnioną. Małe uchybienie w kącie, przy podſtawie, pociąga za ſobą tym większe uchybienie w bokach, im większe ſą nie tylko te ſame boki, ale i ich kwadraty; a zatym, gdy kąty przy podſtawie ſą bardzo oſtre, albo też, gdy ich ſumma nie wiele ſię różni od ſummy dwóch kątów proſtych, w takim razie trzeba odmienić iedno, lub obadwa ſtanowiſka. A ieżeliby między punktami, których położenie i odległość iuż ieſt wyznaczona, nie znaydowały ſię dwa inne takie, aby liniia łącząca ie zdatna

była do wyznaczenia innych punktów pozostałych, trzeba w takim razie brać punkt iakikolwiek mogący wygodnie służyć za stanowisko, z ostrożnościami wyżey wspomionemi; chociby nam z siebie niebył potrzebny do tego celu, któryśmy sobie szczegulniey założyli.

Gdy w działania wchodzić muszą takie wymiary, z których iedne zawisły od drugich, należy przynaymniey być zapewnionym, że w ten związek działań nie wplątały się błędy, z których rozmnożenia urosłoby znacznieysze iakie uchybienie.

Przeto można w rzeczy samey wymierzyć odległość iednę z tych, których doszliśmy z przeniesienia figury na papier, i uważać, czyli się nie rożni od tey która wyznaczona była przez proporcyą, którey dwoma wyrazami były dwa boki na papierze, trzecim podstawa na ziemi, a czwartym odległość szukana; albo też: wynalezioną odległość dwóch punktów, wziąść za podstawę i szukać z niey położenia końca iednego z dwóch, pierwszey podstawy, tak właśnie, iak gdyby ta, była nam ieszcze niewiadoma; a gdy się pokaże, że z tego powtornego działania wypadnie to samo położenie punktu, co z

pier-

pierwszego, albo mało co różnić się będzie, można to mieć za dowod dość pewny, że w ciągu działań nie było uchybienia, przynaymniey znacznieyszego; ponieważ z dwoiakiego takiego działania, iednakowe położenie wypaśćby inaczey nie mogło; chyba żeby ieden błąd poprawił, a bardziey nadgrodził drugi, co się rzadko trafia.

Jakażkolwiek iednak ostrożność będzie i dokładność w działaniach na gruncie, czyli to w wymierzeniu podstawy, czyli w braniu kątów; przenoszenie atoli na papier tych działań, będzie podlegać wielkim nie pewnościom.

Trudność ta ostatnia ztąd szczególniey wynika, że pewną liczbe stopniów brać przychodzi na przenośniku, albo cerklu proporcyonalnym. Na tych zaś dwoch narzędziach, ciężko iest wyznaczyć liczbę stopniów, a niepodobna wyznaczyć liczbę minut, które pospolicie w kącie danym znayduią się. Nuż tedy uchybienie będzie w połowie tylko stopnia, albo 30. minutach; ten nie wielki na oko błąd, pociągnie za sobą inny większy w liniiach, których długość różnić się ztąd będzie od prawdziwey, 30stą, 20stą, aczasem i 10tą częścią tychże samych linii; a ten

błąd tym większe uchybienie w długościach, czyli wielkościach linii sprawi, im mnieysza względem nich była ta liniia, którą wzieliśmy za promień. Zrzodło to omyłek mniey wpływać będzie w takowe uchybienia, gdy iuż nam zkąd inąd wiadome są długości boków należących do Figur, które rysować mamy; a te długości są pospolicie zamiarem szczegulnieyszym działań mierniczych. Gdyby naprzykład: trafiło się, żeśmy w pół linii lub w całey linii uchybili, biorąc na podziałce iakąkolwiek długość, omyłka ta, która ztąd wyniknie, względem położenia na papierze linii figurę iaką zamykaiących, będzie tym mnieysza, im dłuższe były liniie, któreśmy przenosili.

Szukano więc sposobu, aby wszystkie działania na gruncie, tak można było przenieść na papier, żeby te wyrażały się w takich Troykątach, których boki byłyby nam wiadome; to iest żeby można odrysowac na papierze z pomocą samey podziałki, figury podobne tym, któreśmy na gruncie uważali. Maiąc tedy daną liczbę ilości w liniiach lub w kątach, dostateczną do wyznaczenia całego Troykąta, szukano sposobów, i znaleziono ie, iakby ztąd doyść ilości pozostałych w liniiach i kątach ieszcze nie wyznaczonych.

Część

Część Ziemomierſtwa, która na to przepiſy daie, nazywa ſię Trygonometryą, albo *Troykątmierſtwem*; ato dla tego, że ſzczegulniey rzecz tam ieſt o Troykątach, iako tych, od których wyrachowania wſzyſtkich innych wielokątów wyrachowanie zawiſło. Jeſt to część nayżnakomitſza Matematyki, nazwaney (Matheſis pura) przyſtoſować ią bardzo częſto można do Matematyki, którą nazywać można *Mieſzaną*, idąc za łacińſkim nyżwiſkiem (Matheſis mixta:) iako to do Mechaniki, albo nauki o machinach, czyli ſilniach; do Optyki, albo nauki o widzeniu, a naywięcey do Aſtronomii, czyli nauki Gwiazdarſkiey; i dla tego ta część ſzczegulnieyſzey uwagi i zaſtanowienia ſię uczniów wyciąga.

Przygotowanie do Rozdziału naſtępuiącego o Logarytmach.

POnieważ o Logarytmach dokładniey mówić ſię potym będzie, tu tyle tylko o nich powiemy, ile potrzeba umieć, aby ie przyſtoſować można do rozwiązania reguły trzech, i wyciągnienia pierwiaſtku kwadratowego.

301. Logarytmy, ſą to liczby odpowiadaiące liczbom całkowitym, i naſtępnym,

1, 2, 3, 4, 5, 6, i t. d. w ten ſpoſob ; że te pierwſze liczby , czyli Logarytmy , iedne do drugich dodane, odpowiadaią tym oſtatnim, gdy ſą iedne przez drugie rozmnożone.

Y tak znayduiemy w tablicach logarytmowych przy liczbach - -

- - 2, i 3.

Logartmy: 0, 3010300

0, 4771213

Jch ſumma 0, 7781513, ieſt logarytmem liczby 6, która ſię robi z rozmnożenia 2, przez 3.

W zwyczaynych tablicach logarytmowych , logarytmy liczb:

10, - - 1

ſą

100; - - 2

1000 - - 3

10000 - - 4.

i t. d. i t. d.

Logarytmy liczb mnieyſzych od 10, ale wiekſzych od 1, ſą ułomki dzieſiątne niemaiące żadney liczby całkowitey.

Y tak

Y tak Logarytmy liczb:

2, - 0, 3010300.
są
3, 0, 4771213.
4, - 0, 6020600.
5, - 0, 6989700.
i t. d. i t. d.

302 Ponieważ zaś rozmnożenie iakiey liczby przez 1, żadney odmiany w niey nie sprawia; przeto i dodanie logarytmu iedności, do logarytmu tey liczby, odmienić tego logarytmu nie powinno; Logartytm więc iedności iest zero albo 0.

Logarytmy liczb między 10, i 100, są: iedność z przydanemi ułomkami dziesiątnemi.

Legarytmy liczb między 100, i 1000, między 1000, i 10000, i t. d. są liczby całkowite pierwszych, 2, drugich, 3, i t. d. z przydanemi ułomkami dziesiątnemi.

Znak pierwszy logarytmu liczby całkowitey, iest częścią nayznakomitszą tegoż logarytmu, ponieważ daie poznać z iak wielu znaków składa się liczba całkowita, którey iest logarytmem. Tak naprzykład, znak logarytmu pierwszy: 0, 1, 2, 3, 4, i t. d. daie poznać, iż liczba, któ-

którey odpowiada, zawiera się między 1, a 10, albo między 10. a 100, albo między 100, a 1000, albo między 1000, a 10000, albo między 10000, a 100000. i t. d. to iest ma w sobie ieden, dwa, trzy, cztery, pięć, i t. d. znaków liczb całkowitych. Dla tego też pierwszy znak Logarytmu nazywa się iego *Cechą* (Characteristica).

303. Gdy dwa logarytmy, maią iednakowe ułomki dziesiątne, (d) a cecha ich tylko iest odmienna; w takim razie liczby im odpowiadaiące, są 10, 100, 1000, i t. d. razy większe iedna od drugiey, podług tego, iak cecha ich logarytmu większa będzie iedna od drugiey, dwiema, trzema i t. d, iednościami. Y tak logyrytm liczby 20, 200, 2000, i t. d. będzie, 1, 3010300. 2, 3010300, 3, 3010300 i t. d. to iest, będzie ten sam, co i Logarytm liczby 2, przydawszy mu Log: liczb 10, 100, 1000 i t. d.

Trzeba przez kilka przykładów wprawić Ucznie w to pierwsze działanie; biorąc takie liczby, któreby nie większe były, od naywiększey liczby tablic logarytmowych.

304.

(d) *Te ułomki w logarytmie, nazywaią Autorowie piszący po Łacinie:* Mantissa.

304 *Przykład* 1. Rozmnożyć 28 przez 32.

Log: liczby	28	-	1,4471580.
	ieſt		
Log.	32	-	1,5051500.
Summa Log.		-	2,9523080.

Y ta Summa powinna być logarytmem liczby rozmnożoney z 28 przez 32. Jakoż w tablicach logarytmowych przy logarytmie, 29523080, znaydziemy liczbę 896; która to liczba wypada wſamey rzeczy z rozmnożenia 28 przez 32.

Przykład 2. Rozmnożyć trzy liczby: 16, 24, 26,

Log:	16,	-	1.2041200.
Log:	24.	-	1 3802112.
Log-	26.	-	1.4149733.
Summa Log:		-	3.9993045.

Y to ieſt logarytm liczby 9984, która wypada z rozmnożenia trzech liczb: 16, 24, 26.

305. Ponieważ kwadrat iakiey liczby. ieſt ta ſama liczba przez ſiebie rozmnożona; więc logarytm tego kwadratu, będzie row-

równy logarytmowi liczby z którey kwadrat powstał, dwa razy wziętemu.

Przykład 1. Log: 2, - 0.3010300.

Tenże dwa razy wzięty 0,6020600, będzie logarytmem kwadratu z 2, to iest 4.

Przykład. 2, Log. 56 - 1.7481880.
Dwa razy wzięty: - - 3.4963760.
będzie Logarytmem kwadratu z 56, - - to iest 3136.

306. W dzieleniu; liczba podzielna równa się liczbie dzielącey, przez wieloraz rozmnożoney; a zatym logarytm liczby podzieloney, równa się logarytmowi liczby dzielącey dodanemu do logarytmu wielorazu; a ztąd logarytm tego wielorazu, będzie różnicą między logarytmami liczby podzielney i dzielącey.

Przykład. 1. Podzielić 6, przez 2,

Log: 6. - 0.7781513.
Log: 2. - 0.3010300.

Rożnica - - 0.4771213. iest logarytmem wielorazu, to iest 3.

Przykład-

Przykład. 2. Podzielić 1632 przez 34.

Log:	1632 - -	3.2127202
Log:	34 - -	1.5314789

Rożnica - - 1.6812413. ieſt logarytmem wielorazu, to ieſt. 48.

307. W proporcyi: średnie liczby, iedna przez drugą rozmnożone, równe ſą ſkraynym podobnie rozmnożonym, iako to w Arytmetyce i w Rozdziale o proporcyach wywiodło ſię. Przeto iednę z ſkraynych liczbę znayduiemy, dzieląc średnie liczby w ten iak wyżey ſpoſob rozmnożone, przez drugą liczbę ſkrayną: a zatym i logarytm liczby iedney ſkrayney wynaydziemy, odiąwſzy od ſummy logarytmów dwoch liczb średnich, logarytm drugiey liczby ſkrayney.

Przykład. 1. 35 Robotników, zrobiło 45, ſążni pewney roboty, ileż w tym ſamym czaſie zrobi 42, robotników zrówną uſilnością pracuiących?

Log:	42 -	1.6232493,
Log:	45 -	1.6532125
Summa	- -	3.2764618.
Log:	35 -	1.5440680.

Rożnica - 1.7323938. ieſt logarytmem żądanym, liczby 54.

308. Zamiaſt odeymowania, któreby należało czynić w logarytmach, używa ſię wygodnie dodawania w ten ſpoſob: Logarytm liczby dzielącey, a bardziey iego cecha, odeymuie ſię od liczby całkowitey 10, i reſzta dodaie ſię do logarytmu liczby podzielney, a od ſummy, znowu ſię 10 odcina.

Defin. Rożnica logarytmu liczby iakiey od 10, nazywa ſię *dopełnieniem* (complementum) tego logarytmu.

Przykład. Podzielić 6. przez 2.

Log: 6. - -	0.7781513.
Log: 2,0 3010300 dopełnienie tego log: -	9.6989700
Summa - -	10,4771213
Log: wielorazu -	0. 4771213.

ieſt Log. 3.

Podzielić 1632 przez 34.

Log. 1632 3.2127202.

Log: 34, 1.5314789. Dopełn:

Log: 34 8.4685211.

Summa-	11.6812413.
Log: wielora:	1.6812413.

ieſt Log: 48.

Ten

Ten sposob postępowania osobliwiey iest wygodny w Regule Trzech, gdzie odeymowanie następuiące, po dodawaniu, mogłoby w długich zwłaszcza rachunkach, omyłki iakiey dać okazyą. Można zaś i niewielką nawet w rachowaniu maiąc wprawę, na pamięć czynić to odeymowanie, które potrzebne iest do otrzymania dopełnienia logarytmu, które się potym dodaie na mieysce logarytmu odeymować się maiącego,

Przykład. 35 Robotników, zrobiło 45 sążni, ileż zrobi 42 robo?

Log:	42	1.6232493.
Log:	45	1.6532125.
Dopełnienie Logaryt.	35	8.4559320.
Summa którey cecha zmnieyszona liczbą	10.	1.732,3938.

Przykł. 2. Bok ieden prostokąta ma 1344, a drugi 1445, łokci. Trzeba go zamienić na inny prostokąt iemu równy, którego bok ieden ma zawierać 1440. łokci?

Log:

Log: 1344 - 3.1283993
Log: 1445 - 3.1628630

Summa - 6.2912623.

Log: 1440 - 3.1583625.

Roźnica - 3.1328998. ieſt

Logarytmem liczby, którey ſzukaliśmy to ieſt 1358.

309. Ponieważ Logarytm Kwadratu, dwa razy ieſt większy, niż logarytm pierwiaſtku; przeto logarytm pierwiaſtku; ieſt połową logarytmu kwadratu. Aby tedy wyciągnąć z liczby pierwiaſtek kwadratowy, trzeba wziąść połowę logarytmu tey liczby.

Przykład. 1. Wyciągnąć pierwiaſtek kwadratowy z 4.

Log: 4. - 0.6020600.
Połowa - 0.3010300. ieſt logarytmem pierwiaſtku, to ieſt 2.

Przykł. 2. Wyciągnąć pierwiaſtek kwadratowy z 7569.

Log. 7569. - 3.8790385.
Połowa - 1.9395192. ieſt logarytmem pierwiaſtku, to ieſt 87.

Przykł. 3. Boki prostokąta są: 378, i 672, iakiż będzie bok kwadratu iemu równego w powierzchni?

Log: 378 - 2.5774918.
Log: 672 - 2.8273693.

Summa - 5.4048611.

Połowa - 2.7024305. iest logarytmem liczby szukaney to iest 504.

310, *Co się tycze logarytmów ułomków dziesiątnych.*

Niech będzie liczba nap: 1764, którey logarytm: 3.2464986. Podzieliwszy tę liczbę przez 10, logarytm wielorazu powinien mieć iedną iednością mniey w cesze swoiey (303.) Logarytm tedy liczby 176, 4, będzie - 2.2464986.
Podobnie log: 17, 64, będzie 1.2464986.
Log: 1, 764 - 0, 2464986.

Dzieląc 1764, przez 1000, logarytm wielorazu, to iest liczba 1,764, ma cechę mnieyszą 3 iednościami, niżeli miał logarytm liczby 1764, nie podzieloney. Gdyby tedy przyszło, 1764 dzielić przez 10000, 100000. 1000000, i t. d. Logarytmy wielorazów, to iest ułomków dziesiątnych:

tnych: 0, 1764, 0, 01764, 0, 001764 i t. d. powinnyby mieć 4, 5, 6, i t. d: iednościami mnieyszą cechę, niżeli miał logarytm liczby 1764, nie podzieloney. Że zaś Cecha logarytmu liczby 1764, iest: 3, a Cechy logarytmów liczb: 10000, 100000, 1000000, i t. d. są: 4, 5, 6, i t. d. to iest liczby większe od 3, od których ie odeymować przypada. więc dla większey w odeymowaniu wygody uważa się, iakoby cecha 3, powiększona była 10 iednościami, i dopiero od tak powiększoney odeymuią się cechy liczb dzielących: 10000, 100000, 1000000. i t. d. to iest cechy: 4, 5, 6, i t. d. pamiętaiąc zawsze nato przydanie, i zmnieyszaiąc znowu resztę, to iest logarytm wielorazu tąż liczbą: 10; Będzie więc log $\frac{1764}{10000}$, albo 0,1764 = 13, 2464986 — 4 (e) = 9, 2464986, to iest dla dodanych 10, do cechy 3, będzie w samey rzeczy = 9,2464986 — 10. Tak też Log: 0,01764, będzie = 8, 2464986 — 10. Log. 0. 001764 będzie = 7, 2464986 — 10. i t. d.

Przy-

(e) *Znak — kładzie się przed tą ilością nap. przed tą liczbą, która ma być od drugiey odiętą.*

Przykład 1. Rozmnożyć 24 przez 0, 5.

Log: 24 = 1,3802112.

Log: 0,5 = 9,6989700. — 10.

Summma = 1,0791812. = Log: 12, to ieſt liczby wypadaiącey z rozmnożenia 24 przez 0,5.

Przykład 2. Rozmnożyć 24 przez 0, 05.

Log: 24 = 1,3802112.

Log: 0,05 = 8,6989700. — 10.

Summa = 0,0791812. ieſt logarytmem liczby roznożoney.

Ten logarytm nie znayduie ſię w tablicach logarytmowych z cechą, 0, ale ſię znayduie z cechą 1, i odpowiada mu liczba: 12; a zatym liczba, którey ſzukaliśmy, będzie 10 razy, mnieyſza to ieſt: 1, 2.

Przykład 3. Podzielić 32 przez 0, 5.

Log: 32 = 1,5051500.

Log: 0,5 = 9,6989700. — 10.

Reſzta. 1,8061800 ieſt logarytmem wielorazu, to ieſt liczby 64.

Odeymuiąc 9,6989700, od 1,5051500, odeymowalibyśmy 10 razy więcey, niż potrzeba; więcby to 10 do reszty przydać należało. Na iedno zaś wyidzie, gdy te 10, któremi iest powiększona liczba maiąca się odeymować, przydamy też i do liczby, od którey ią odeymować przypada; to iest gdy odeymuiemy 9,6989700 od 11,5051500.

Przykł. 4. Podzielić 144, przez 0, 06.

Log: 144 = 2,1583625.

Log: 0,06, = 8,7781513 — 10.

Rożnica - - 3,3802112. iest logarytmem wielorazu, to iest liczby: 2400.

Co do ułomków zwyczaynych.

311. Ponieważ ułomek uważać można, iako oznaczaiący dzielenie licznika iego przez mianownika; będzie zatym logarytm ułomka równy różnicy między logarytmem licznika iego i mianownika.

Niech będzie naprzykład ułomek nie właściwy $\frac{7}{5}$.

Log:

Log: 7. - 0,8450980.

Log: 5 - 0,6989700.

Rożnica - 0,1461280 = Log: $\frac{7}{5}$.

Można się o tym przekonać używszy ułomka dziesiątego zamiast ułomka $\frac{7}{5}$, będzie albowiem $\frac{7}{5} = \frac{14}{10} = 1,4$.

Log: 14 - 1.1461280.

Azatym Log. 1,4 - 0.1461280.

312. gdyby ułomek był właściwy, to jest gdyby licznik iego był mnieyszy od mianownika; w takim razie logarytm licznika byłby też mnieyszy od logarytmu mianownika; Aby więc można odiąć logarytm mianownika od logarytmu licznika, pożyczamy 10. temu logarytmowi iak wyżey (310) w podobnym przypadku.

Przykład 1. Niech będzie ułomek: $\frac{2}{5}$.

Log: 2 = 0,3010300.

Log: 5 = 0,6989700.

Log: $\frac{2}{5}$ = 9,6020600. — 10.

Przykład 2. Trzeba znaleść Log: $\frac{7}{15}$.

Log: 7 = 0,8450980.

Log: 15. = 1,1760913.

Log. $\frac{7}{15}$ = 9,6690067. — 10.

Przykł: Trzeba znaleść log: $\frac{1}{25}$.

Log: 1. = 0,0000000.

Log: 25 = 1,3979400.

Log: $\frac{1}{25}$ = 8,6020600. — 10.

Zdaie się, iżby przystało używać o
miennego iakiego znaku cechy, gdy ta n
leży do logarytmu odpowiadaiącego u
łomkowi; aby ią zaraz na weyrzenie ro
zeznać można od cechy logarytmu', któ
liczbie całkowitey odpowiada.

313. Kiedy logarytm iaki, nie zna
duie się w Tablicach, można wtedy liczb
którey odpowiada wyznaczyć, albo z u
pełną dokładnością, albo z małym uchy
bieniem.

Przykł: 1. Jakiż iest wieloraz 5, prz
4 podzielonych?

Log: 5 - - 0.6989700.
Log: 4 - - 0.6020600.

Rożnica - - 0,0969100.

Logarytm oſtatni oznaczaiący różnicę dwôch pierwſzych logarytmów, nie znayduie ſię w Tablicach ani z cechą 0, ani z cechą 1; ale ſię znayduie z cechą 2; liczba onemu odpowiadaiąca ieſt: 125; ale że ten logarytm ma cechę 2, więc naſz będzie odpowiadał liczbie 100 razy mnieyſzey, to ieſt: 1,25.

Przykł. 2. Trzeba znaleść kwadrat z 299, maiąc tylko Tablice Log. nie daley rozciągaiące ſię, iak do 10000, to ieſt takie, których naywiękſzy Log. ieſt: 40000000.

Log: 299 - - 2.4756712.
Tenże podwoiony - 4.9513424.

Drugiego tego logarytmu w tablicach zwyczaynych nie znayduiemy. Zmnieyſźmy więc iednością cechę iego: Ten Logarytm zmnieyſzony 3.9513424, lubo co do wſzyſtkich liczb ſwoich, nie znayduie ſię w tablicach, znayduiemy go iednak co do pierwſzych; i mało co większy ieſt od Log: 3.9513375. a mnieyſzy od 3.9513861.

Pierwſzy z tych logarytmów znayduiących ſię zupełnie w Tablicach, ieſt Log: liczby 8940, a drugi Log. liczby - - - 8941.
A zatym liczba, którey ſzukamy, będzie między 89400 - - - - - i - 89410.

Logarytm dany przewyższa logaryt pierwszy Tablicowy liczbą 49; mniey zaś iest od drugiego logarytmu Tablic wego liczbą 437. Ta tedy którey szuk my liczba, powinna daleko więcey zbliż się do 89400, niż do 89410.

Widziemy z Tablic, że kilka logary mów, które następuią po logarytmac liczb 8940, i 8941, maią tę samę, co i logarytmy rożnicę, to iest 486; tak, ia różnica liczb im odpowiadaiących iest t sama, to iest 1; a zatym ieżeli rożnic między logarytmem danym i logarytme Tablic iemu naybliższym, iest naprzykł połową, lub trzecią częścią, lub czwa tą, i t. d. rożnicy między tymże nayb szym logarytmem, i drugim, zaraz po ni następuiącym, to też i rożnica między liczbą odpowiadaiącą logarytmowi dan mu, a liczbą odpowiadaiącą logarytmo wi naybliższemu, będzie prawie połow trzecią częścią, czwartą i t. d. iedności która iest różnicą między dwiema liczba mi naturalnemi, po sobie idącemi. Z tedy rożnica 49, iest prawie $\frac{1}{10}$ części różnicy 486, więc i różnica liczby szuka ney dla dodatku liczbie 8940, będzie dzie siąta częścią iedności, to iest 0, 1; a z tym liczba odpowiadaiąca logarytmowi 3·95134 24 będzie prawie 8940, 1, liczb zaś

zaś odpowiadaiąca Log: 4.9513424, będzie, 89401, to ieſt kwadrat, którego ſzukaliśmy.

Ponieważ w tym przykładzie ſzczególnym zakończenie liczby 299 pokazuie, iż kwadrat iey ma ſię kończyć na 1, można było bez tak długiego rozumowania doyść teyże liczby kwadratowey: 89401.

314. Czemu różnica dwóch logarytmów po ſobie naſtępuiących ieſt tym mnieyſza, im ſą większe liczby, którym one odpowiadaią, można to tak wyłożyć.

Rożnica logarytmów dwóch liczb: 10, i 9, ieſt: 457575.

Rożnica logarytmów dwóch liczb 100, i 90, ieſt ta ſama; (ponieważ $\frac{100}{90} = \frac{10}{9}$;) ale ta rozkłada ſię na dziesięć innych mnieyſzych różnic między logarytmami liczb 90, i 91, 91 i 92, 92 i 93 - - - - - 99 i 100.

Różnica między logarytmami liczb 900, i 1000, ieſt znowu ta ſama co i między logarytmami liczb 10 i 9. (ponieważ $\frac{1000}{900} = \frac{10}{9}$) ale ta rozkłada ſię na 100 mnieyſzych daleko różnic między logarytmami liczb 900, i 901, 901. i 902, 902 i 903 - 999 i 1000.

Podobnie i różnica logarytmów liczb 9000 i 10000, lubo ta sama iest, co między logarytmami liczb 9 i 10, ale się rozkłada na 1000. innych rożnic mnieyszych, i t. d.

315. Używanie logarytmów iest bardzo przydatne w wyciąganiu pierwiastków z ilości nie spolmiernych.

Przykład 1. Trzeba wyciągnąć przybliżony pierwiastek kwadratowy z 2.

Log: 2. - 0.3010300.

Połowa tego Log - - 0.1505150.

Szukaymy tey połowy z cechą 3. Logarytm naybliższy w tablicach będzie: 3.1504494, który odpowiada liczbie: 1414. Aże ten logarytm iest mnieyszy od 3.1505150, więc liczba odpowiadaiąca logarytmowi danemu będzie między 1,414. i 1,415. Kwadraty zaś tych ostatnich liczb są: 1,999396; i 2,002305.

Aby pierwiastek bardziey ieszcze przybliżyć do prawdziwego, weźmy różnicę 656. między logarytmem danym, i naybliższym z tablic; i znowu weźmy drugą różnicę 3070 między dwoma tablic logaryt-

garytmami, danemu naybliższemi. Ułomek $\frac{6}{7}\frac{1}{0}\frac{4}{7}\frac{1}{0}$ na dziesiątne części obrocony, będzie miał pierwsze dwa znaki liczebne: 21; azatym pierwiastek bardziey przybliżony będzie: 1,4142 1. Możnaby i więcey, gdyby kto chciał znaków liczebnych przydać w tym pierwiastku, kończąc daley dzielenie, a tym więcey pierwiastek ten byłby do prawdziwego przybliżony.

Przykł. 2. Trzeba znaleść liczbę przybliżoną do następuiącego wyrazu: $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

Log. 5. - 0.6989700; $\frac{1}{2}$ Log: 5 - 0.3494850.

Log: 2. - 0.3010300; $\frac{1}{2}$ Log: 2 - 0.1505150

Rożnica - - 0.1989700

Ostatni logarytm oznaczaiący różnicę, odpowiada prawie w tablicach z cechą przydaną: 3, liczbie; 1581, a zatym $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ równa się prawie 1,581.

RO-

ROZDZIAŁ XII.

O Trygonometryi.

316. WYſtawmy ſobie Troykąt w koło wpiſany. Boki tego Troykąta byłyby cienciwami łuków przeciwnych iego kątom. Aże miarą tych kątów ſą połowy tychże łuków; więc boki tego Troykąta będą cienciwami łuków dwa razy większych, niżeli ſą te, których ważność w ſtopniach ta ſama ieſt, co i kątów im przeciwnych.

Idzie zatym, że gdybyśmy mieli ułożoną z figury dokładney, lub z rachunku Tablicę cienciw do łuków wſzyſtkich koła, zacząwſzy naprzykład od łuku iedney minuty aż do 180 ſtopniów (którego to oſtatniego łuku cienciwa ieſt naywiększa) iuż tym ſamym i ſtoſunek boków Troykąta znalezlibyśmy z danych kątów iego; i wzaiemnie (lubo nie tak proſto) doſzlibyśmy ważności w ſtopniach kątów, z danych boków Troykąta.

317. Aby uniknąć brania połowy, lub wedwoynaſob kątów Troykąta, ſzukam zamiaſt cienciw innych linii, do których boki Troykąta byłyby proporcyonalne, i takich; któreby ſię właściwie ściągały do kątów tegoż Troykąta. Kąt w środku koła

koła opisanego na Troykącie, zamykaiący ramionami swemi ten łuk, którego cięciwą iest bok ieden tegoż Troykąta, kąt mówię taki, dwa razy iest większy od tego, który przy okręgu koła naprzeciw, stoi tegoż boku Troykąta; a zatym gdybyśmy ten kąt w środku, przecieli liniią na dwie równe części, iedna takowa część byłaby równa tamtemu kątowi Troykąta. Bok tenże Troykąta byłby prostopadły do linii przecinaiącey kąt na dwie równe części; a ta liniia przecielaby go na dwie rakże równe części; Toż samo przystosować można i do innych dwoch boków tego Troykąta. W ten sposob wystawiono sobie boki Troykąta, względem kątów im przeciwnych,

313. *Defin.* Wziąwszy łuk koła iakikolwiek, ieżeli od iednego końca tego łuku, spuściemy prostopadłą na promień przechodzący przez drugi koniec tegoż łuku, ta prostopadła ma nazwisko *Sinus* (f) a po Polsku nazwać ią można *Wstawą* tego

(f) *Wyraz ten* Sinus *ztąd podobno ma swoy początek: Potacinie* Cienciwa *nazywa się* Inscripta; *a połowa cienciwy,* semissis Inscriptæ; *dla skrócenia, pisano może dawniey* S. Ins. *Przepisuiący iakie*

tego łuku, że się wstawia między końcem iednym łuku, kąt mierzącego, i między promieniem przez drugi koniec tegoż łuku przechodzącym,

Tab. XVIII. Fig. 1. Niech będzie AB łuk koła; prostopadłą BD, spuszczoną od końca B tego łuku, na promień CA, przechodzący przez drugi iego koniec A, nazywać będziemy *wstawą* tego łuku.

319. *Wniosek* 1. Wstawa łuku równa się połowie cięciwy łuku innego, dwa razy większego, iak naprzykład Wstawa BD, łuku BA, równa się połowie cięciwy BE, łuku dwa razy większego BAE.

320. *Wniosek* 2. Wstawy łuków rosną od $\frac{0}{0}$, aż do 90,°, a ponieważ wstawa stopniow 90, równa się promieniowi, i iest naywiększą, nazywa się dla tego *Wstawą całą* (Sinus totus.)

321. *Wniosek* 3. Wstawy łuków większych od czwartey części okręgu koła, zmniey-

---

dzieło Matematyczne, nie wiedząc znaczenia wyrazu tego skroconego, opuścił punkt oddzielaiący te dwa wyrazy, i dawszy słowu Sins *zakończenie łacińskie, napisał* Sinus, *i ztąd potym wzięte podobno było to nazwisko.*

zmnieyszaią się coraz bardziey zacząwszy od 90° aż do 180°; tak dalece że Wstawa stopniów 180° równa się 0. Wstawa zaś każdego łuku większego od 90°, a mnieyszego od 180° iest ta sama, która i łuku mnieyszego od 90°, a Spełniaiącego łuk pierwszy do 180°. Y tak naprzykład Wstawa łuku 100°, taż sama iest co i łuku 80° wstawa łuku 120° ta sama, co i łuku 60° i t. d. Takowe *Spełnienie* łuku do 180° albo do pół okrągu koła, nazywa się po łacinie *Supplementum arcûs*.

Co się tycze łuków większych od połokrągu koła, o tym niema potrzeby mowić w tych początkach.

322. *Wniosek* 4. Ponieważ promień naprzykład CF, iest Wstawą naywiększą ze wszystkich, czyli Wstawą stopniów 90°, Wstawa zaś od łuku AFb, większego od czwartey części tego okrągu, iest ta sama, co i łuku ab, mnieyszego od czwartey części tegoż okrągu; (który to łuk ostatni Spełnia pierwszy do połokrąga) idzie zatym, że do ułożenia Tablicy na wstawy łuków dosyć wyznaczyć wstawy tych łuków, które są mnieysze od 90°.

323. *Wniosek* 5. Wstawy łuków podobnych, w kołach odmiennych, tak się maią

maią do siebie, iak tychże kół promienie. Jeżeli tedy mamy Tablicę wstaw podług promienia podzielonego na pewną liczbę części równych; wynaydziemy przez regułę trzech i wystawy podobnych łuków, podług innego promienia.

324. *Wniosek* 6. Ponieważ kąt w środku, naprzykład ACB, tyle stopniów w sobie zamyka, co i łuk AB, który go mierzy, i iest mu proporcyonalny; będzie więc wstawa łuku AB, Wstawą także i kąta ACB.

Wstawa tedy kąta, iest prostopadła, spuszczona od punktu iakiego w iednym z ramion iego, do drugiego ramienia, biorąc za promień odległość tego punktu od wierzchołka kąta, Cokolwiek zatym powiedziało się o wstawach łuków, wszystko to przystosować można i do wstaw kątów: Y tak, Wstawy kątów rosną od 0, aż do wstawy 90°; która się równa promieniowi; zmnieyszaią się znowu zacząwszy od wstawy 90°, aż do wstawy 180° (która iest = 0;) i wstawa kąta roztwartego, tą samą iest, co i kąta Ostrego, który tamtego spełnia, do 180°.

Wstawy równych kątów, są do siebie, iak liniie wzięte za promienie.

A ieżeli

A ieżeli dwie liniie ſą wſtawami dwoch kątów, względem tegoż ſamego promienia, czyli Wſtawy całey, te liniie tak ſię do ſiebie mieć będą, iak Wſtawy tychże dwóch kątów.

325. *Twierdz.* 1. W każdym Troykącie boki tak ſię maią do ſiebie, iak wſtawy kątów przeciwnych tymże bokom.

Niech będzie Troykąt ABC; bok iego naprzykład AC, tak ſię ma do boku BC iak wſtawa kąta B, do wſtawy kąta A. *Fig.* 2

Dowodz: z wykreśleniem. Na danym Troykącie opiſzmy koło, i poprowadzmy ſrednicę CD, i cienciwy DA, DB. kąty: BDC, BAC ſą równe, bo ſą w okręgu, i zamykaią ramionami ſwemi iednakowy łuk BC. Dla teyże przyczyny równe ſą także i kąty: ADC, ABC. Oprocz tego, kąty: CBD, CAD ſą proſte, bo ſą w połkole; więc Liniie CB, CA, będą wſtawami kątów: CDB, CDA względem teyże ſamey wſtawy całey, czyli promienia CD; a zatym tak ſię mieć będą do ſiebie te liniie, iak wſtawy kątów A i B.

Można ieſzcze i naſtępuiącym ſpoſobem, tego ſamego dowieść.

Opi-

Opisawszy koło na danym Troykącie; połowy boków iego, będą wstamami połowy kątów w środku im przeciwnych, a zatym będą też i wstawami kątów Troykąta przeciwnych tymże bokom; (biorąc za Wstawę całą, promień tego koła.) Są tedy do siebie połowy tych boków, iak wstawy kątów im przeciwnych, aże połowy tak się maią do siebie, iak ich całości; więc też i całe boki Troykąta, tak się do siebie mieć będą, iak wstawy kątów przeciwnych tymże bokom.

326. *Wnioſek.* Za pomocą Tablicy na Wstawy ułożoney, podług promienia iakiegokolwiek, można doyść stosunku boków Troykąta, którego kąty są nam iuż wiadome; azatym, gdy ieszcze i bok ieden tegoż Troykąta iest wiadomy, będzie można znaleść i dwa inne iego boki.

327. Jakoż rachowano i ułożono Tablicę Wstaw, podług promienia podzielonego nap: na 100000 części równych. Ten a nie większy podział, zwłaszcza w tablicach do zwyczaynieyszego używania ułożonych, znayduie się. Żeby zaś rachunek krótszym i łatwieyszym uczynić, przydano i tablicę logarytmów, Wstaw tychże. W takowych iednak tablicach, gdzie i logarytmy wstaw znayduią się, u-

waża-

uważano promień, albo wstawę całą, iak gdyby na 10 000 000 000 części równych była podzielona, a zatym, iak gdyby logarytm iey, miał za cechę czyli początkową liczbę: 10, która oznacza, iż wstawa zawiera w sobie liczbę części równych złożoną z znaków liczebnych iednym więcey; tak, iak cecha logarytmu wstawy całey, to iest liczba: 10, oznacza, iż wstawa cała zamyka w sobie znaków liczebnych 11, zamykaiąc części równych: 10 000 000 000.

Nie wykłada się teraz iak ułożone są te tablice; podany tylko będzie sposob ich używania. W tablicach tych znayduiemy na dwóch kartach iedney obok drugiey, w dwóch różnych słupach czyli kolumnach, Wstawy dwóch kątów których summa czyni kąt prosty, albo 90°. Tablica tych wstaw po lewey ręce kart, rozciąga się od 0, aż do 45,°. Tablica zaś po prawey ręce idzie wspak od 90°, aż do 45. Te kąty których stopnie wyrażone są po prawey ręce, nazywaią się *dopełnieniem* tamtych (complementum) do 90°; a ich wstawy *wstawami dopełnienia* (sinus complementi) czyli krócey, *Dostawami* (Cosinus.)

328. Summa kwadratów, z Wstawy, i z dostawy łuku, albo kąta, równa się kwadratowi promienia, czyli wstawy całey.

Fig. 1. Bo ponieważ dwa łuki; nap. AB, i FB, (albo dwa kąty: ACB, i FCB) są dopełnieniem ieden drugiego; Wstawa BG; łuku FB, równa iest linii CD; kwadrat zaś linii CD z kwadratem wstawy BD, równa się kwadratowi promienia BC, więc i summa kwadratów z BG i BD, równa będzie kwadratowi promienia BC.

329. *Przystosowanie.* Maiąc na polu wymierzoną podstawę, i kąty które czyni podstawa z dwiema liniiami wykierowanemi ku iednemu celowi, znaleść tych ostatnich dwóch linii długość?

Fig 3. Niechby Troykąt ABC, wyrażał Troykąt na polu, zawarty między podstawą wymierzoną i dwiema liniiami dążącemi ku iednemu celowi.

Niech będzie AB = 1200
A = 50°
B = 72°
więc A + B = 122°
a zatym 180° (A + B) = 58° = C.
Wstawa kąta C: Wstawy kąta A = AB : BC
wsta: C: wsta: B = AB : AC

Log.

Log: AB = 3,0791812.

Log wſt: A = 9,8842540.

Summa = 12,9634352.

Log: wſt. C = 9,9284205

Rożnica = Log. BC = 3,0350147.

Azatym bok BC = prawie 1084.

Z pierwſzey tedy proporcyi znaydziemy bok BC, dodaiąc do ſiebie logarytmy wſtawy A, i boku AB, a odiąwſzy od ich ſummy, logarytm wſtawy C; Rożnica albowiem dwóch logarytmów oſtatnich, pokazuie logarytm boku BC. który bok w tablicy oſobney logarytmów liczb, znaydziemy przytymże logarytmie = 1083, 96. to ieſt prawie = 1084.

Podobnym ſpoſobem znaydziemy z drugiey proporcyi, i drugi bok AC = 1345, 76.

Dla ſkrocenia rachunku, można z początku zaraz odiąć logarytm wſtawy kąta C, od logarytmu liczby wyrażaiącey bok AB, dodawſzy do cechy tego drugiego

logarytmu liczbę: 10 (co na pamięci mieć potrzeba:) Powszechnie zaś, dodaiąc osobno logarytmy wstaw kątow A i B, do logarytmu liczby wyrażaiącey bok AB, dochodziemy dwóch boków innych.

Można także wygodnie użyć w rachunkach Trygonometrycznych dodawania, zamiast odeymowania, kładąc dopełnienia logarytmów. (g) na mieysce tych, które przez nich są dopełnione.

Y tak w pierwszym przykładzie, ponieważ wstawa kąta C, iest pierwszym wyrazem proporcyi, z którey szukamy boków AC, albo BC; podstawa zaś AB iest iednym z wyrazów średnich, a drugim wstawa kąta A, lub B; ieżeli tedy do logarytmu podstawy AB, dodamy dopełnienie logarytmu wstawy kąta C, ta summa dodana ieszcze do logarytmu wstawy kąta A, lub B, będzie logarytmem boku BC, albo AC, odiąwszy tylko logarytm promienia.

Przy-

(g) *Dopełnieniem logarytmu nazywa się ta liczba, która z nim razem czyni logarytm promienia, iak naprzykład,* 0, 0715795 *z logarytmem wstawy C.* 99284205 = 10,00000000.

Przykł. Dopełnienie logarytmu wstawy - - - C = 0,0715795.
Log: AB = 3,0791812.
Log: wst: A = 9,8842540.

Summa zmieyszona liczbą 10. - - = 3,0350147 = Log. BC.

Więcey ieszcze podobnych przykładów uczniom podać należy.

330 *Przyst.* 2. Maiąc dane kąty, i bok ieden Troykąta, znaleść powierzchnią iego przez iednę proporcyą.

Niech będzie ten sam co wyżey Troykąt, którego wiadome nam są kąty, i podstawa AB; szukaymy powierzchni tego Troykąta, spuściwszy prostopadłą CD.

Wst: C : Wst. A = AB : BC.

Promień: Wst. B = BC : CD.

Więc Pr: × Wst. C: wst: A × wst. B
- - = AB : CD.
= AB^2 : AB × CD
= AB^2 : 2. Powierzchni

A zatym, 2 Pr. × wst. C : wst. A × - - wst. B = AB^2 : Powierzchni

Log.

Log. AB = 3.0791812.

Logarytm ten dwa razy wzięty =
Log. AB^2 = 6,1583624.
Log. Wst. A = - 9.8842540.
Log. Wst. B = - 9.9782063.

Summa = 26,0208227.

Log. 2 = 0.3010300.
Log. Wst. C = 9,9284205.
Log. Pr. = 10.0000000.

Summa 29.2294505.

Roźnica tych dwóch summ: 5,7913722, iest logarytmem liczby, która oznaczy powierzchnią a ta będzie = 618546. bliſko.

Proporcya ta, z którey doſzliśmy powierzchni Troykąta, tak ſię wyraża: Proſtokąt z Wſtawy całey, czyli z promienia, i z wſtawy kąta przeciwnego iednemu bokowi, tak ſię ma do proſtokąta wſtaw dwoch kątów przy tym boku; iak ſię ma tenże ſam bok, do proſtopadłey nań ſpuſzczoney od wierzchołka kąta przeciwnego; albo też: proſtokąt z promienia, i z wſtawy kąta przy wierzchołku, tak ſię ma do proſtokąta z wſtaw dwóch kątów przy podſtawie, iak ſię ma podſtawa do wyſokości Troykąta.

331.

331. *Przyst.* 2. Maiąc dane w liczbach dwa boki Troykąta, i kąt między niemi zawarty, znaleść powierzchnią tego Troykąta przez iednę proporcyą.

Niechby w Troykącie ABC, znane były boki: AB, AC, i kąt A.

Spuśćmy na podstawę AB, prostopadłą CD; będzie Pr: - - -

Wst. $A = AC : CD.$
$= AC \times AB : CD \times AB.$
$= AC \times AB :$ 2 powierzchni

A zatym Pr.

Wst. $A = \frac{AC \times AB : \text{powierzchni.}}{2.}$

To iest: tak się ma promień do wstawy iednego z kątów Troykąta, iak połowa prostokąta z dwóch ramion kąta danego, do powierzchni Troykąta.

Niech będzie $AB = 384.$
$AC = 405.$
$A = 50°.$

Log. $\frac{1}{2}$ AB	= Log. 192	=	2,2833012.
Log. AC	= -	-	2,6074550.
Log. Wst. 50°	= -	-	9,8842540.

Summa zmnieyszona liczbą 10, (to iest logarytmem promienia) = 4,7750102, a zatym powierzchnia którey szukaliśmy = 59767.

Fig. 4. 332. *Przyfłos.* 4. Maiąc dany Troykąt proſtokątny, którego wiadoma iest przeciw proſtokątna i iedno ramie kąta proſtego, znaleść inne dwa kąty, i bok trzeci.

Wziąwſzy w tym Troykącie przeciwproſtokątną za promień, ramiona kąta proſtego, będą oraz wſtawami kątów im przeciwnych; a zatym gdyby dana przeciwproſtkątna była wyrażona przez 100000, i znaczyła promień na tyle części równych podzielony; ſzukaiąc w tablicach między wſtawami, lub doſtawami, znaleźlibyśmy liczbę wyrażaiącą bok drugi dany; a liczba ſtopniów odpowiadaiąca tey wſtawie, pokazałaby ważność w ſtopniach, kąta przeciwnego bokowi danemu.

Gdyby zaś przeciwproſtkątna, przez inną liczbę była wyrażona, a nie przez tę, którąby ſię równała wſtawie całey w tablicach znayduiącey ſię w takim razie użyćby trzeba naſtępuiącey proporcyi:

BC: AC = Pr. wſt. B.

Niech będzie BC = 1548.

AC = 1248.

Log.

Log. AC = 3,0962146.

Przydawszy log. Pr. = 13,0962146.

Log. BC = 3,1897710.

Rożnica = 9,9064436. =
Log. Wst: B.

B = 53°, 44' —, to iest 53 stopniów, i coś mniey niż 44 minut.

C = 36°, 16', ✝ to iest 36 stopniów, i coś więcey niż 16 minut.

Pr: wst: C = BC: AB.

Log. BC = 3,1897710.

Log. wst. C = 9,7719872 ✝

Odiąwszy Log. promienia będzie tych dwóch Logarytmów Summa = 2,9617582 ✝ = Log. AB; a zatym AB = 915,7 ⋈

Jeśli tylko samego boku AB, znalezienie iest potrzebne, można skrocić rachunek, biorąc summę logarytmów summy i różnicy przeciw prostkątney, i boku danego; i dzieląc tę summę przez 2; które to działanie na tym się zasadza, że kwadrat boku AB, równa się różnicy kwadratów

dratów przeciw prostkątney BC, i boku drugiego AC, albo (co na iedno wychodzi) prostokątowi z summy ich i z różnicy, to iest prostokątowi z summy BC + AC i z różnicy: BC — AC. Summa tedy logarytmów summy: BC + AC, i różnicy BC — AC będzie logarytmem kwadratu, AB^2, a zatym połowa tey summy logarytmów, będzie logarytmem Pierwiastku, to iest boku AB.

BC + AC = 2796.

BC — AC = 300.

Log. (BC + AC) = 3,4465372.

Log. (BC — AC) = 2,4771213.

Summa = 5,9236585.

Połowa = 2,9618292 = Log. AB.

A zatym bok AB = 915,8 +.

Porównywaiąc z sobą tę ważność dwoiaką boku AB, ktora z dwóch odmiennych rachunków wypada, postrzegamy różnicę mnieyszą niż $\frac{1}{9000}$ całey ważności; która to różnica, ztąd pochodzi, że w pierwszym rachunku braliśmy kąty

B i C w samych stopniach i minutach pierwszych nie szukaiąc minut drugich.

333. *Przypios.* 5. Maiąc dany w Troykącie roztwarrokątnym, kąt roztwarty, bok iemu przeciwny, i iedno z dwóch ramion iego, znaleść drugie ramie i dwa inne kąty?

Niech. będzie Troykąt ACB, którego dany iest kąt roztwarty CAB, bok CB iemu przeciwny, i ramie iedno AC; znaleść inne kąty: B, i C; i bok AB. *Fig. 5.*

Sposob 1. postępowania. Z tey proporcyi; BC : AC = Wst. A : wst. B; doydziemy kąta B, a odiąwszy od 180°, summę kątów A i B, reszta pokaże kąt C.

Z drugiey proporcyi; wst. A : wst. C = BC: AB, wiadomy będzie bok AB.

Sposob 2. Spuśćmy prostopadłą CD, na bok przedłużony BA.

W Troykącie prostokątnym ACD, którego bok AC i kąt A iest wiadomy, można doyść dwóch boków CD i AD, z dwóch następuiących proporcyi.

Pr. wst. A = AC: CD.
Pr. Dostawy A = AC: AD.

Maiąc wiadomą w Troykęcie proſtokątnym BCD, przeciwproſtkątną BC, i iedno kąta proſtego ramie. CD, będzie można doyść (332.) Boku BD, od którego odciąwſzy AD, znaydziemy bok AB.

Przykłady wyżey podane iuż doſyć obiaśnić były powinny, iak daley ſobie w tym działaniu poſtąpić.

Fig. 6. Podobnego ſpoſobu użyć należy gdy kąt oſtry ieſt dany, i bok iemu przeciwny większy od drugiego boku danego. Ta tylko ieſt różnica, że w drugim ſpoſobie poſtępowania linija AB, będzie ſummą a nie różnicą linii BD, AD.

Fig. 7. Gdy zaś bok CB, przeciwny kątowi danemu A, mnieyſzy ieſt od boku danego AC, który ſłuży za ramię temuż kątowi; w takim razie wſtawa kąta B wynaleziona z prob. orcyi: CB : AC = wſt: A wſt: B może być równie wſtawą dwóch kątow B, B, iednego oſtrego, a drugiego roztwartego, i tamten ſpełniaiącego do 180°. Podług drugiego ſpoſobu poſtępowania, linija AB, AB może być ſummą, albo różnicą linii AD, BD albo BD; co daie dwa odmienne Troykaty: ACB', ACB; które lubo maią w ſobie dwa boki dane i kąt oſtry także dany, różnią ſię iednak trzecim

cim bokiem, i dwoma innemi kątami. Zgadza się to zupełnie z tym, co się już w Geometryi okazało w Rozd. II.

334. *Przystosowanie* 6. Maiąc daną liczbę boków w wielokątach foremnych, wyznaczyć ważność ich boków względem promienia koła, w które też wielokąty mogą być wpisane.

Rozwiązanie. Połowa boku każdego w foremnym wielokącie, w koło wpisanym, iest wstawą połowy kąta w środku tegoż wielokąta, wziąwszy za promień, promień koła na tym wielokącie opisanego.

Liczba boków Wielokąta.	*Połowy kątów w środku*	*Wst: Połowy kątów w środku*
3	60°	86602.
4	45°	70711
5	36°	58779
6	30°	50000
7	$25\frac{5}{7}°$	43388
8	$22\frac{1}{2}°$	38671
9	20°	34202
10	18	30902
11	$16\frac{4}{11}°$	28171
12	15°	25882
15	12°	20791
16	$11\frac{1}{4}°$	19509
20	9°	15643
24	$7\frac{1}{2}°$	13053
i t. d.	i t. d.	i t. d.

Te wstawy dwa razy wzięte są bokami wielokątów wpisanych w koło, którego promień = 100000.

Niechby był Troykąt prostokątny, którego wiadome są dwa ramiona kąta prostego; trzeba znaleść przeciw prostkątną, i dwa inne kąty.

Już się wyżey pokazało, że maiąc dane dwa boki w Troykącie prostokątnym, znayduie się przeciw prostkątna, dodawszy do siebie dwa kwadraty tychże boków, i z summy wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy. Ale gdy liczby oznaczaiące wielkości boków danych są bardzo wielkie; nie mało czasu trzebaby na podniesienie tych liczb do kwadratu; a że i summa tych kwadratów będzie bardzo wielka, iż z niey pierwiastku kwadratowego wyciągnąć przez logarytmy nie można, a wyciągać go zwyczaynym sposobem długaby praca była; przeto dla większey wygody, w tey i wielu innych okolicznościach, wyrachowano w tablicach logarytmów, i inne ieszcze, oprocz wstaw, liniie.

335. *Defin.* Niech będzie łuk koła iakiego, a od iednego końca, tego łuku niech będzie poprowadzona styczna, tak dale-

daleko, aż się spotka z promieniem przedłużonym, i przechodzącym przez drugi koniec tego łuku. Ta część styczney zamknięta między punktem dotknięcia koła, i promieniem przedłużonym nazywa się *Styczną Troykątmierską* (Tangens Trigonometrica) albo tylko *Styczną* tego łuku. Linija zaś zawarta między środkiem koła, i między punktem, gdzie promień przedłużony przecina styczną, nazywa się *Sieczną Troykątmierską*. (Secans Trigonometrica) albo tylko *Sieczną* tego łuku.

Y tak liniie AT, CT są, pierwsza styczną, a druga sieczną łuku AB. Jest także pierwsza linija styczną, a druga sieczną kąta ACB, biorąc za promień linią CA. Ponieważ łuk FB, iest dopełnieniem do 90°, łuku AB; ieżeli tedy poprowadziemy styczną FP, aż do iey spotkania się z promieniem CA przedłużonym; linija FP, będzie styczną, a CP sieczną dopełnienia łuku AB, a inaczey ieszcze pierwsza nazywa się *Dostyczną* (cotangens) druga zaś *Dosieczną* (Consecans) łuku AB. *Tab. XVIII. Fig. 1.*

Jak względem wstaw, tak względem stycznych i siecznych, uważano w tablicach, iedne łuki tyle przewyższaiące 45°, ile drugie, nie dochodzą 45°; uważano zatym

zatym i co do ſtycznych, i co do ſiecznych dopełnienia iednych łuków względem drugich.

336. *Naprzykład*; Troykąty DCB, ACT ſą podobne; więc.

1. DC: DB = AC: AT, to ieſt doſtawa tak ſię ma do wſtawy, iak promień do ſtyczney.

2. DC: CB = AC: CT, czyli doſtawa do promienia, iak promień do ſieczney.

Tak też, dla podobieńſtwa Troykątów: BCG, FCF będzie.

1. Wſtawa do doſtawy iak promień do doſtyczney.

2. Wſtawa do promienia, iak promień do doſieczney.

Maiąc ſtyczne, łatwo można wyrachować doſtyczne. Bo ponieważ podobne ſą Troykąty ACT, FPC, będzie, AT: AC = CF: FP; to ieſt promień będzie średnim Geometrycznym między ſtyczną i doſtyczną. Logarytm tedy promienia dwa razy wzięty, równa ſię ſummie logarytmów ſtyczney i doſtyczney.

337.

337. Styczne rosną, zacząwszy od 0, aż do stycznej 45°, która się równa promieniowi, (bo w tym razie Troykąt ACT będzie równoramiennym) i daley ieszcze rosną aż do 90°, których styczna będąc od promienia CF równoodległą, nigdzie się z nim nie zeydzie, a zatym większą iest, od wszelkiey długości którąby wyznaczyć można.

Sieczne podobnym także iak i styczne rosną sposobem.

338. Niechby był Troykąt iakikolwiek prostokątny, naprzykład CAB, którego wiemy w liczbach dwa ramiona kąta prostego CAB. *Tab. XIX. Fig. 1*

Wziąwszy za promień, naprzykład linią CA, linia AB będzie styczną, a linia CB, sieczną kąta C.

Gdybyśmy tedy mieli linią CA, to iest: promień wyrażony w tablicach przez 100000; liczba stopniów, przy którey znaleźlibyśmy liczbę wyrażaiącą linią AB, czyli styczną, pokazałaby ważność kąta C; i znowu liczba między siecznemi odpowiadaiąca kątowi C, oznaczyłaby ważność linii CB.

Gdyby zaś liniia AC, nie była w tych liczbach wyrażona, w których wyrażona iest wstawa cała, czyli promień tablic, w takim razie trzeba zrobić dwie proporcye, pierwszą AC: AB = Pr. styczney C. z którey doydziemy ważności kąta C; drugą Pr. Siecz C = AC: CB.

Przykł. Niech będzie AC = 8464,
AB = 5678.

Logarytm AB z przydanym Log: promienia iest - 13,7541954.
Log. AC - - 3,9275757.

Rożnica, czyli Log. styczney
- - - C = 9,8266197.
a zatym kąt C = 33°, 51.

Log. AC = 3,9275757.
Log. siecz C (odciąwszy Log. Pr.) = - - 0,0806610.

Summa — 4,0082367. =

Log: CB; więc CB = 10191. ✝

339. *Uwaga* Gdyby przyszło wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z summy kwadratów AC ✝ AB², znaleźlibyśmy wa-

ważność przeciw prostkątney BC, większą niż 10192, a mnieyszą niż 10193, a zatym nie zgadzaiącą się z ważnością wyżey znalezioną, 10191 ✝; co ztąd pochodzi, że wyznaczaiąc ważność kąta C, opuściły się minuty drugie, i przestało się na samych stopniach, i minutach pierwszych; i to opuszczenie sprawiło, że ważność BC, mnieysa iednością prawie wypadła; ale uchybienie takowe iest bardzo małe, gdyż od prawdziwey ważności różni się tylko mało co więcey, iak $\frac{1}{10000}$.

Poprawa tey omyłki taka być może.

Ponieważ różnica między logarytmem stycznej C, znalezionym, i logarytmem tablic naybliższym, iest 874; a różnica dwóch logarytmów Tablic mnieyszego i większego od logarytmu znalezionego, iest: 2730, więc będzie, 2730 : 874 = 60" : 19", a zatym kąt C = 33° 51' 19"

Log. - AC = 3,9275757.
Log: siecz: C.
(odciąwszy Log.Pr.) = 0,0806880.

Sum: czyli Log.BC = 4,0082637.
więc BC = 1,0192 ✝ = 10192,1.

340. *Przystosowanie.* W Troykącie, w którym wiadome są dwa boki, i kąt zawarty między niemi, znaleść bok trzeci, i dwa inne kąty?

Fig. 2. Niech będzie Troykąt ACB, w którym dane są dwa boki AC, BC, i kąt C, trzeba ztąd doyiść boku AB, i dwoch innych kątów.

Rozwiąz. Spuściwszy prostopadłą BD, na bok AC; w Troykącie prostokątnym BCD wiemy przeciw prostkątną BC, i kąt dany C, a zatym doydziemy dwóch boków BD, DC; a że wiadoma także iest podstawa AC. więc odiąwszy CD od AC znaydziemy AD; i znowu w Troykącie prostokątnym ADB z wiadomych dwóch ramion kąta prostego, doyść będzie można (338) innych dwóch kątów, i przeciwprostkątney AB.

Ten sposob w tym iest nie wygodny, że trzeba cztery uczynić proproporcye, aby doyść boku AB. Jako zaś, to, co z każdey z pierwszych trzech proporcyi wypada wchodzi w czwartą proporcyą, tak i omyłki tam popełniane, tu wpływaią.

Ażeby więc w tym co z ostatniey proporcyi wypadnie, uniknąć uchybienia, należy

ży iak naydokładnieyszy rachunek czynić w trzech pierwszych. Y to ieszcze przydać potrzeba, że w tym sposobie działania szukać się musi dwóch odcinków AD i DC, iako też i wysokości BD, lubo o nie nie masz zapytania.

341 Gdyby przyszło dochodzić samey tylko linii AB, w tym razie możnaby użyć następuiącego sposobu.

$AB^2. = AC^2 + BC^2 - 2\,AC \times CD.$

Aże iest BC : CD = Pr: Dostawy BCD

więc 2AC × BC : 2AC × CD = Pr. dost: BCD.

a zatym $2\,AC \times CD = \frac{2AC \times BC \times \text{dost: BCD.}}{\text{Pr.}}$

A ztąd $AB^2 = AC^2 + BC^2 - \frac{2AC \times BC \times \text{Dost: LCD.}}{\text{Pr:}}$

Ze zaś tey ostatniey ilości nie można zawsze rozłożyć na inne mnożące ią ilości, więc przez same logarytmy działania tego wykonać w tym razie nie możemy;

W takowym tedy przypadku, używa się pospolicie następuiącey proporcyi.

342.

342. *Twierdz*: 2. Summa dwóch boków Troykąta, tak ſię ma do rożnicy tychże boków, iak ſtyczna połowy ſummy dwóch kątów przeciwnych tym bokom, do ſtyczney połowy różnicy tychże kątów.

Trzeba tu nayprzod wyłożyć uczniom, co ſię rozumi przez wyrazy tey proporcyi; a wſzczegulności pokazać im, że ſtoſunek między ſtycznemi połowy dwóch kątów, albo dwóch łuków nie ieſt ten ſam, co między ſtycznemi całych tych kątów albo łuków. Widocznie ſię to okazuie w tablicach Trygonometrycznych.

Fig. 3. Niech będzie Troykąt ABC, w którym bok AB, mnieyſzy ieſt od boku AC; w tym Troykącie będzie AC. ∔AB: AC— AB = ſtycz: B ∔ C : ſtycz: B—C.
2 2

Dowodz: Wziąwſzy AD = AB, i pociągnąwſzy BD, Troykąt równoramienny ABD, i Troykąt nie równoramienny ABC, maią kąt ſpolny A. Więc ſumma kątów ABD, ADB, równa ſię ſummie kątów ABC, ACB; a zatym ieden z kątów Troykąta równoramiennego, nap: kąt ABD, równa ſię połowie ſummy dwóch kąt-

kątów ABC, ACB Troykąta ABC. Kąt ABC, większy z dwóch kątów ABC, ACB, składa się z połowy summy, i z połowy różnicy tychże dwóch kątów; aże kąt ABD, iest połową ich summy, więc kąt CBD będzie połową ich różnicy.

Linia DC iest różnicą dwóch boków AC, AB; przeciąwszy ią na dwie równe części w punkcie E, liniia CE będzie połową różnicy dwóch boków AC, AB. Aże bok większy AC. równa się połowie summy wraz z połową różnicy tychże dwóch boków, więc AE będzie połową ich summy, gdy CE iest połową różnicy; a zatym liniie AE, CE. tak się maią do siebie, iak połowa summy boków AC, AB, do połowy ich różnicy. Na tym więc całe działanie rozchodzi się, aby pokazać, iż styczne kątów ABD, CBD, tak się maią do siebie, iak liniie AE, CE.

Z Punktu A, spuśćmy na BD, prostopadłą AF, przedłużywszy ią aż do G. Ponieważ Troykąt BAD iest równoramiennym, liniie BF, FD będą równe; a że też są równe liniie DE, CE, więc pociągnąwszy liniią FE, podobne będą Troykąty: BDC, FDE, i liniie FE, BC równoodległe; a zatym i Troykąty AFE, AGC są podobne; Będzie więc AE : CE = AF.

AF : FG. Ze zaś wziąwſzy za promień liniią BF, liniie FA, FG. będą ſtycznemi kątów: FBA, FBG, albo ABD, CBD; więc AE : CE = ſtycz: ABD : ſtycz: CBD; albo, $\frac{AC+AB}{2} : \frac{AC-AB}{2} =$ ſtycz: $\frac{B+C}{2}$: ſtycz: $\frac{B-C}{2}$. albo nakoniec, $\frac{AC+AB}{2}$: $\frac{AC-AB}{2}$ = ſtycz: $\frac{B+C}{2}$: ſtycz: $\frac{B-C}{2}$.

343. *Przyſtoſowanie* 1. Gdy dwa boki AC, AB, ſą wiadome, będzie wiadoma ich ſumma AC + AB, i ich różnica AC — AB; gdy także wiemy kąt A, wiedzieć tym ſamym będziemy ſummę i połowę ſummy dwoch innych kątów B i C, a zatym i ſtyczną połowy tey ſummy; więc i czwartego wyrazu proporcyi poprzedzaiącey, to ieſt ſtyczney połowy różnicy tych dwóch kątów doydziemy, a ztąd wiadoma nam będzie i połowa różnicy tych dwóch kątów. Wiedząc zaś połowę ich ſummy, i połowę różnicy; gdy połowę ſummy do połowy różnicy dodamy, znaydziemy kąt większy B, a odiąwſzy połowę różnicy od połowy ſummy, okaże ſię kąt mnieyſzy C. Znaydziemy nakoniec i bok trzeci BC.

Przykł: Niech będzie - -
- AC = 2452. AC + AB = 4296.
AB = 1844, AC — AB = 608,
A = 44° B + C = 136°.
B + C = - 68°.

2

4296: 608 - - - -
ſtycz: 68° ſtycz. B — C

2.

Log. ſtycz: 68° = 10,3935904,

Log. 608 = 2,7839036,

Summa - - 13,1774940.

Log. 4296 = 3,6330643.

Rożnica = 9,5444297. =

- - - Log. ſtycz: 19 . 18' +

Więc B — C = 19°. 18'. +

2

Aże B + C = 68° więc -

2

- - B = 87°. 18', +

C = 48°. 42'. —

Wſt: C : wſt. A = AB : BC

Log.	AB =	3,2657609.
Log. wſt:	A =	9,8417713.
Summa =		13,1075322.
Log. wſt.	C =	9,8757927 —

Reſzta, to ieſt Log: BC = 3231739 5 ✝
BC = 1705 ✝

Aby ſię przeświadczyć o dokładności tego działania ſzukamy BC, i przez drugą proporcyą ; wſt: B : wſt: A = AC : BC.

Log.	AC =	3,3895205.
Log. wſt:	A =	9,8417713.
Summa =		13,2312918.
Log. wſt.	B =	9,9995176 ✝
Reſzta =		3,2317742 —
więc BC =		1705,2 —

344. *Przyſtoſowanie* 2. Wyznaczyć przez rachunek odległość dwoch mieyſc niedoſtępnych.

Widzieliśmy (w Rozd: XI.) że do tego trzeba było wymierzyć podſtawę i wy-

wyznaczyć kąty, które przy końcach podſtawy czynią dwie liniie wykierowane ku dwom punktom, których odległości ſzukamy. Można doyść i przez rachunek żądaney odległości.

Niech będzie AB podſtawa wymierzona, i wyznaczone kąty: xAB i AB,xBA, i BA. *Fig.* 4.

Pnieważ w Troykącie xAB, wiemy dwa kąty przy podſtawie, odiąwſzy więc ich ſummę od dwoch kątów proſtych, albo od 180°, reſzta pokaże kąt trzeci A xB.

Podobnym ſpoſobem doydziemy i kąta A i B.

W Troykącie AxB, maiąc wiadomą podſtawę AB, i wſzyſtkie kąty, można doyiść dwóch innych boków, a wſzczególności linii Ax.

Podobnie i w Troykącie A y B z wiadomego boku AB, i wſzyſtkich kątow, można wyznaczyć dwa inne boki; a wſzczególności liniią A y.

W Troykącie na koniec xAy znaiąc dwa boki Ax, Ay, i kąt x Ay między niemi

niemi zawarty, (który iest różnicą między kątem wyznaczonym x AB, y AB;) można doyść linii xy, to iest żądaney odległości.

Uwaga. Ponieważ wyznaczenie linii xy, zawisło od linii Ax, Ay; dokładność też w wyznaczeniu linii xy, zawisła od tey dokładności, z którą dwie tamte linie były wyznaczone.

Przykład. Niech będzie

x AB = 77°
y AB = 42°
y BA = 102°
xBA = 54°.
AB = 1200.

więc A x B = 49°.
A y B = 36°.
x A y = 35°.

Wft: AxB : wft: xBA = AB : Ax.

Log. AB = 3,0791812.
Log. wft. xBA = 9,9079576.

Summa = 12,9871388,
Log. wft. A x B = 9,8777799.

Reszta = 3,1093589, = Lo: Ax
Ax 1286,35.

Wft:

Wſt: A y B : wſt. ABy = AB : Ay.

Log. AB = 3,0791812.
Log. wſt. ABy = 9,9904044.

Summa - 13,1695856.
Log. wſt. A y B = 9,7692187.

Reſzta = 3,4003669. =
- - - - Log. Ay.

Ay = 2514. bardzo bliſko

Znalazſzy bok Ax = 1286,35.
Ay = 2514.

Kąt między temi bokami zawarty: x
Ay = 35°.

Będzie Ax + Ay = 3800,35
Ay — Ax = 1227,65.
Axy + Ayx = 145°
Axy + Ayx = 72°½.

2

Więc (podług Twierdz 2.): 3800,35:
1227:65 = ſtycz: 72°½: ſtyczna - -
Axy — Ayx.

2.

Log.

Log. ſtycz: $72° \frac{1}{2}$ = 10,5012777.

Log. 1227,35 = 3,0890735.

Summa = - 13,5903512.

Log. 3800,35 = 3,5798237.

Rożnica = - 10,0105275. =

- - Log. ſtycz: 45° 42'—.

więc $\frac{Axy - Ayx}{2}$ = 45°, 42' —

Aże ieſt $\frac{Axy + Ayx}{2}$ = 72°, 30'

Więc Ax = 118 12' —
Ayx = 26° 48 +

Maiąc wiadome wſzyſtkie kąty, w Trykącie xAy, i oprocz tego dwa boki: AxAy, znaydziemy bok trzeci xy, to ieſt odległość, ktorey ſzukamy, przez iednę z tych dwóch proporcyi:

Wſt: Ayx: wſt: xAy = Ax: xy.
albo wſt. Axy: wſt. xAy = Ay: xy.

Szuka-

Szukaymy boku xy przez pierwszą nap: proporcyą;

Będzie Log. Ax = 3,1093589.
Log. wſt. xAy = 9,7585913.

Summa = 12,8679502.
Log. wſt. Ayx = 9,6540586 —

Roż: to ieſt Log. xy = 3,2138916 ✝
więc xy = 1636 ✝

Zoſtaie ieſzcze, do rozwiązania ten przypadek, w którym z trzech boków danych w Troykącie, ſzukamy kątów iego.

Sposob zwyczaynie używany, zawiſt na tym, aby ſzukać dwóch odcinków podſtawy oddzielonych przez proſtopadłą, na tę podſtawę ſpuſzczoną, od wierzchołku kąta iey przeciwnego.

345. *Twierdz: przybrane.* Podſtawa Troykąta, tak ſię ma do ſummy dwóch boków iego, iak różnica tychże boków, do różnicy odcinków podſtawy.

Niech będzie Troykąt ABC, w którym z wierzchołka C, ſpuſzczona ieſt proſtopała CD, na podſtawę AB; w tym Troykącie, AB : BC ✝ AC = BC — AC : BD — AD- *Fig.* 5.

Od punktu C, iak od środka, promieniem CA nakreślmy koło, które przetnie podstawę AB w punkcie G, bok BC, w punkcie F, a tenże przedłużony, w punkcie E.

Będzie zatym - - -
BE = BC + AC (bo AC = CE;)
BF = BC — AC (bo AC = CF:)
BG = BD — AD (bo AD = DG:)

A ponieważ sieczne BA, BE od iednednego punktu B wychodzą, więc (231) BA : BE = BF : BG; to iest, tak się ma podstawa BA do summy dwoch boków = BE; iak się ma rożnica tychże boków = BF, do rożnicy BG odcinków, które czyni prostopadła CD spuszczona z wierzchołka kąta C. na Podstawę.

346. *Przystosowanie.* Ponieważ odcinków BD, AD, wiemy summę i różnicę, wiedzieć będziemy i każdy z nich z osobna, iako to iuż się wyżey pokazało; będzie albowiem większy odcinek $BD = \frac{AB + BG}{2}$, a mnieyszy $AD = \frac{AB - BG}{2}$.

Aże, BC: BD = Pr. Dost: B.
A zaś AC: AD = Pr. Dost. A.
Więc doydziemy i kątów B, i A.

Przykł.

Przykł. Niech będzie - -

AB = 1200.
EC = 935.
AC = 612.
BC + AC = 1547.
BC — AC = 323.

Log. BC + AC = 3,1894903.
Log. BC — AC = 2,5092025.

Summa = 5,6986928.

Log. AB = 3,0791812.

Reszta = 2,6195116.

Więc BD — AD = 416,4. bardzo blisko.

- - - -

AB = 600.

2

BD — AD = 208,2

2.

Summa = 808,2. = BD.
Rożnica = 391,8 = AD.

BC : BD = Pr. Dost: B.

Log. BD z przydanym Log. Pr. =
- - - 12,9075188.
Log. BC = 2,9708116.

Reszta = 9,9367072 =

Log. Doſt: B. więc B = 30°. 11' 15."
AC: AD = Pr. Doſt. A.

Log: AD z przydanym Log. Pr. =
- - - 12,5930644.
Log. AC = 2,7867514.

Reſzta = 9,8063130. =

Log. Doſt. A. więc A = 50° 12'. 23".
C = 99°. 36'. 22".

Dla zapewnienia ſię o tym, można ſzukać ieżeli ſto ſunek wſtaw kątów A, i B równa ſię ſtoſunkowi boków im przeciwnych; będzie zaś w ſamey rzeczy rownał ſię, gdy w proporcyi, którey trzema wyrazami będą, BC, AC. wſt. A za czwarty wyraz wypadnie wſtawa kąta B, teyże ſamey iak wyżey znalezliśmy ważności.

Log. wſt. A = 9,8855618.
Log. AC = 2,7767514.

Summa = 12,6723132.
Log. BC = 2,0708116.

Reſzta = 9,7015016. =
Log. wſt. B.

Kąt B, odpowiadaiący temu logarytmowi, różni ſię mniey niż 3" od wyżey znalezionego.

347. *Uwaga.* Nie trzeba opuszczać takowych doświadczeń, zwłaszcza, gdy rachunki zawisły iedne od drugich.

W tym ostatnim razie, naylepiey iest wziąść za podstawę bok naywiększy Troykąta; bo tak z zupełną pewnością wiedzieć będziemy, iż kąty przy tey podstawie są ostre.

PRZYDATEK I.

Przystosowania Trygonometryi do rożnych działań na gruncie.

348. *Przystosowanie* 1. Wyznaczywszy na gruncie; a potym wyrachowawszy położenia i odległości dwóch punktów, względem iedney podstawy, wzięta była za drugą podstawę odległość tych dwóch punktów i użyto iey do wyznaczenia położeń, innych Punktów, które z pierwszych stanowisk, albo były niewidzialne, albo też od nich bardzo odległe. Trzeba teraz wyrachować położenia tych ostatnich punktów względem pierwszey podstawy.

Niech AB wyraża pierwszą podstawę; x y, dwa punkta, których położenia, i od- *Tab. XX Fig. 1.*

ległości wyznaczone iuż są względem tey podstawy, przez wymierzenie kątów przy A i B. Weźmy potym x y za drugą podstawę dla wyznaczenia położenia punktu z, niewidzialnego z pierwszych stanowisk: A i B, albo od nich bardzo odległego. Jakże to położenie punktu z, wyznaczemy, względem pierwszey podstawy AB?

Sposob postępowania przez rachunek:

1. W Trykącie A x B wyznaczemy Ax.

2. W Troykącie A y B wyznaczmy Ay.

3. W Troykącie xAy wiadome maiąc: Ax, Ay, i kąt xAy, wyznaczmy: xy, i kąt: Axy.

4. W Troykącie xzy, wiadomą maiąc podstawę, i kąty wszystkie, wyznaczmy xz.

5. W Troykącie Azx wiadome maiąc: Ax, zx, i kąt Axz wyznaczmy Az.

Podobnie można wyznaczyć Bz.

349. *Uwaga.* Tym sposobem postępuiąc, można także sprawdzać działania iedne przez drugie czynione z różnych punktów stanowisk.

350. *Przyſtoſowanie* 2. Do iakieykolwiek linii czyniącey kąt wiadomy z podſtawą ſtoſować położenia punktów wyznaczonych iuż względem tey podſtawy.

Niech będzie AC liniia czyniąca kąt wiadomy z podſtawą AB, i niech x, będzie punktem, którego położenie iuż ieſt wyznaczone względem podſtawy AB; trzeba ztąd doyść położenia tego punktu względem linii AC. *Fig. 2.*

Doydziemy tego, ſpuściwſzy proſtopadłą xP na liniią AB, i wyznaczywſzy wielkość tey proſtopadłey, iako też iey odległość AP, od punktu A.

Sposob postępowania przez rachunek.

W Troykącie AxB można było wyznaczyć liniią Ax; kąt xAB ieſt też wiadomy; więc znaydziemy kąt CAx, który ieſt różnicą kątów CAB, xAB. W Troykącie tedy PAx, maiąc wiadome kąty, i przeciwproſtkątną Ax, można będzie wyznaczyć linie: AP, i Px.

351. *Przyſt:* 3. Wyznaczyć promień koła, maiąc daną cięciwę odcinka iego, i kąt tegoż odcinka.

Niech

Fig. 3. Niech będzie AB liniia dana, na którey nakreślić trzeba odcinek koła mogący zawierać w ſobie kąt dany; wyznaczmy promień tego koła.

Niech będzie C, środek koła, ſzukanego; poprowadźmy liniią CD do środka linii AB, ta będzie proſtopadłą do AB. w Troykącie ACD, kąt ACD równa ſię kątowi odcinka danemu, bo miarą iego, ieſt połowa łuku AB; kąt CAD, ieſt iego dopełnieniem. Wziąwſzy AD za promień, będzie AC, ſieczną kąta CAD, a tym można wyznaczyć, promień koła ſzukanego, z tey proporcyi; Jak ſię ma promień do doſieczney kąta danego, tak ſię ma połowa cięciwy daney do promienia koła, ktorego ſzukamy.

352. *Uwaga.* Stoſunek AD do CD, równy ieſt ſtoſunkowi wſtawy całey, czyli promienia, do ſtyczney kąta CAD.

Aże, ieżeli AB ieſt bokiem wielokąta foremnego, będzie CD promieniem koła wpiſanego w ten wielokąt; więc maiąc dany bok wielokąta foremnego, i wiedząc liczbę boków iego, można wyznaczyć, promień koła wpiſanego i opiſanego, przez dwie naſtępuiące proporcye.

1. Wſta-

1. Wstawa cała, tak się ma do styczney połowy kąta w środku koła, iak połowa boku wielokąta do promienia koła wpisanego.

2. Wstawa cała tak się ma do dosieczney połowy kąta w środku, iak połowa boku wielokąta, do promienia koła opisanego.

353. *Przystosowanie* 4. Wyznaczywszy trzy boki Troykąta na gruncie iakim uważanego, i znaiąc kąty, pod któremi widziemy te trzy boki z iednego punktu, trzeba wyznaczyć odległość tego punktu, od trzech wierzchołków Tróykąta.

Niech ABC wyraża Troykąt, którego wszystkich boków iuż dośliśmy, niech x, będzie punktem, z którego uważaliśmy kąty, pod któremi dały nam się widzieć linie, AB, BC, AC; trzeba ieszcze wyrachować linie: Ax, Bx, Cx. *Fig.* 4

Niech będą D, i E, środki kół, których odcinki nakreślone na liniiach AB, i BC mogą zawierać w sobie kąty równe tym, pod któremi widzieliśmy linie AB i BC. Punkt x będzie w przecięciu tych dwóch kół.

Dwa

Dwa promienie BD, BE, mogą być wyrachowane tak, iak w przyſtoſowaniu 3.

W Troykącie ABC, w ktorym wſzyſtkie boki ſą wiadome, można wyrachować kąt ABC. Kąt ABD ieſt wiadomy, bo ieſt dopełnieniem kąta wiadomego AxB; więc wiadomy ieſt także i kąt CBD. Aże wiemy i kąt CBE, który ieſt dopełnieniem kąta CxB, więc wiedzieć będziemy i kąt DBE; a zatym w Troykącie DBE, wiemy dwa boki: BD, BE, i kąt DBE, między niemi zawarty; a zatym można wyznaczyć wyſokość BF, która ieſt połową linii ſzukaney Bx; albo, (co krócey ieſzcze będzie) można, w tym Troykącie wyrachować kąty D, i E. Że zaś kąt w środku D, równa ſię kątowi xAB, wſpieraiącemu ſię na łuku dwa razy większym; a kąt w środku E, ieſt ſpełnieniem (w tey figurze) kąta xCB; więc kąty; BAx, BCx ſą wiadome; a zatym w Troykątach: BAx, BCx, wiemy kąty wſzyſtkie, i boki: BA, BC; zkąd będzie można wyznaczyć liniie Ax, Bx, Cx, których ſzukamy.

Jeden prawie ieſt ſpoſob poſtępowania na iakiekolwiek położenie punktu x. W tym tylko bywa odmienny, że czaſem trzeba dodawać, a czaſem odeymować

kąty

kąty znayduiące się przy B; i że czasem kąty D i E, równe są kątom przy A i C, a czasem są ich spełnieniem.

354. Rachunek ten może być ieszcze skróconym w nie których przypadkach szczegulnych.

Przykład 1. Niech punkt x, znayduie się na przedłużeniu iednego z boków Troykąta ABC, nap: na przedłużeniu boku AB. *Tab. XXI. Fig.* 1.

W Troykącie CAx, wiadome są kąty A, x, i bok CA; więc będzie można wyrachować boki: Ax, Cx.

Przykład 2. Niech trzy punkta: A.B,C, będą na iedney linii. *Fig.* 2.

Prostokąty Ax × Cx, i Bx × Cx są równe, pierwszy prostokątowi z prostopadłey spuszczoney od x, na AB, i z średnicy koła opisanego na Troykącie AxC; drugi, prostokątowi z teyże prostopadłey, i z średnicy koła opisanego na Troykącie CxB; więc pierwsze dwa prostokąty tak się maią do siebie, iak i dwa drugie. Aże pierwsze tak się maią do siebie, iak liniie; Ax, Bx, a drugie tak się maią do siebie, iak dwie średnice; więc stosunek Ax do Bx

iest

ieſt wiadomy, bo ieſt równy ſtoſunkowi średnicy koła opiſanego na Troykącie ACx, do średnicy koła opiſanego na Troykącie BCx albo równy ſtoſunkowi promieni tych dwóch kół. Szukaiąc tedy podſtawy w Troykącie, któryby miał kąt w wierzchołku równy kątowi AxB, a zatym wiadomy, i dwa ramiona równe dwom wyżey wſpomnionym promieniom; gdybyśmy tę podſtawę znaleźli równą linii AB; liniie też Ax, Bx, byłyby równe tym promieniom. Gdyby zaś ta znaleziona podſtawa nie była równa linii AB, tedy z dwóch naſtępuiących proporcyi, doydziemy boków: Ax, Bx.

1. Jak ſię ma podſtawa znaleziona, do podſtawy AB, tak ſię ma promień pierwſzy do Ax.

2. Jak ſię ma podſtawa znaleziona, do podſtawy AB, tak ſię ma promień drugi do Bx.

Tym ſpoſobem możemy też doświadczać, czyli działania naſze czynione na ziemi; były dokładne.

355. *Przyſtos:* Niech będzie dana liniia proſta na gruncie; wyznaczyć, bez mierzenia odległości i położenia względem tey linii, dwóch punktów, z których widziemy obadwa iey końce.

Niechby

Niechby wiadoma była nap: liniia AB, niech będą dwa punkta: C, i D, z których każdego widzieć można końce A, i B, tey linii; wyznaczyć odległości, i położenia tych dwóch punktów, C, i D, tak względem siebie, iak i względem linii A B, nie mierząc pierwey żadney z tych odległości. *Fig.* 3.

Z punktów C, i D, wyznaczmy kąty: ACB, DCB, ADB, ADC, a zatym i kąty: ACD, BDC.

Dawszy iakąkolwiek ważność linii CD, możnaby z niey dochodzić ważności linii: CA, CB, DA, DB, i AB.

Gdybyśmy przypadkiem ważność tey ostatniey linii AB, znaleźli równą prawdziwey iey ważności. którą wiemy; byłoby to dowodem, żeśmy natrafili na prawdziwą ważność linii DC, a zatym i innych linii.

Gdyby zaś znaleziona ważność linii AB, nie była równa ważności iey wiadomey; tedy następuiącą trzeba uczynić proporcyą: iak się ma ważność mniemana linii AB, do ważności iey prawdziwey, tak się ma ważność mniemana linii CD, do ważności iey prawdziwey.

Przysto-

Przyſtoſowania do miar wyſokości.

Mogą Nauczyciele namienić tylko o ſpoſobach wyznaczenia wyſokości iakiey, czyli to przyſtępney, czyli też nie doſtępney, przez ſame żerdzie, albo przez odbiianie promienia światła padaiącego na powierzchnią iaką płaſką, i ſpoſobną do odbiiania, albo na koniec przez wielkość cienia rzuconego od tego przedmiotu (obiectum) ktorego wyſokość wyznaczyć mamy.

Pierwſzy z tych ſpoſobów, iako w przepiſach ſwoich, i z przyczyny łatwości, ieſt bardzo dobry, tak w używaniu bardzo nie doſkonały. W ogulności nawet mówiąc, należy zawſze powątpiewać o działaniach, choćby też z naylepſzemi narzędziami czynionych, gdy idzie o wyznaczenie iakiey wyſokości; iednoſtayna albowiem w ſobie wyſokość, nap: góry iakiey, może ſię wydawać czaſem większą, a czaſem mnieyſzą, podług nie iednakowego ſtanu w którym ſię znaydować zwykła naſza. *Powietrznia*; (atmoſphera) iako o tym obſzerniey będzie w Fizyce.

356. *Przyſłos.* r. Niech będzie iaka wyſokość nie wiadoma, do którey iednak

można

można przystąpić; trzeba wyznaczyć iey wielkość; z punktu iakiego oddalonego od teyże wysokości.

Wymierzmy podstawę od punktu na gruncie obranego, aż do spodku tey wysokości; od tegoż punktu uważaymy iaki kąt czynią na płaszczyznie pionowey dwie linie, iedna ku wierzchołkowi tey wysokości, a druga po ziemnie wykierowana. Znaydziemy wielkość tey wysokości nad linią poziemną (którą perspektywa poziemnie ustawiona pokazuie) przez następuiącą proporcyą; Jak się ma wstawa cała do stycznej kąta uważonego, tak się ma podstawa wymierzona do wysokości szukaney. Dodawszy do tey wysokości, wysokość narzędzia, znaydziemy całą wysokość, którey szukaliśmy. (g)

357. *Uwaga.* Rzadko się trafia, aby całe przystąpić można do spodku wysokości, którą wyznaczyć przypada. Tak nap:

(g) *W dalszych przykładach trzeba zawsze na to pamiętać, aby wysokość narzędzia dodawać do wyrachowaney Trygonometrycznie wysokości; co lubo się wyraźnie kłaść nie będzie, same ieanak okoliczności dostatecznie potrzebę tego okażą.*

napzykład, maiąc wyznaczyć wyſokość wierzchołka wieży iakiey, baſzty i t. d. nie można wymierzać podſtawy, tylko aż do ſpodku iey murów; można iednak zmierzyć całą grubość wieży, baſzty i t. d. a ztąd wnieść położenie iey, środka, a zatym i długość, którą dodać potrzeba do podſtawy wymierzoney.

388 *Przyſtos.* 2. Niech będzie wiadoma wyſokość (i) z którey wierzchołka wyznaczyć przypada odległość punktu położonego na gruncie, a widzialnego z mieyſca ſtanowiſka.

Uſtawiwſzy kątomierz na płaſzczyznie pionowey, iak wyżey, naznaczmy kąt, który czyni perſpektywa iedna w poziemnym położeniu, a druga wykierowana ku punktowi, którego odległości ſzuka my. Zrobmy potym tę proporcyą; iak:

ſię

(i) *Wyſokości wieży, lub iakiego podobnego budynku łatwo dayść można, ſpuściwſzy z góry na dol ſznur, który potym zmierzony, da poznać tę wyſokość. Trzeba iednak mieć baczność na to, aby ſznur iednakowo wſzędzie był wyciągniony. Obacz między innemi Dzieło iuż wyżey zalecone P. de Luc. Tom. 2. § 516.*

ſię ma wſtawa cała do doſtyczney kąta naznaczonego, tak ſię ma wyſokość dana do odległości ſzukaney,

Uwaga. Można tym ſpoſobem wyznaczyć odległość od ſpodku wyſokości iakiey, tylu punktów, ile zechcemy; maiąc iuż wiadomą wyſokość, z którey wierzchołka wyznaczać przypada te odległości. Uważaiąc zaś, i, znacząc kąty, które zrobi perſpektywa (k) kierowana do tych różnych punktów, będzie można wyznaczyć i położenie ich, iednych względem drugich.

350. *Przyſłos.* 3. Maiąc wiadomą odległość punktu iakiego od ſpodku wyſokości, na którey ſię ſtoi, wyznaczyć tę wyſokość.

Uwa-

(k) *Te kąty ściśle mówiąc, nie tak czyni perſpektywa coraz do innego punktu na gruncie położonego, kierowana, iako bardziey płaſzczyznu pionowe przechodzące przez perſpektywę za każdym celowianiem. Naywygodniey ſię to działanie wykona: gdy kątomierz będzie miał połkole proſtopadłe do reſzty zanarzędzia i opatrzone perſpektywą ruchomą.*

Uważywszy kąt tak iak wyżey, zrobmy tę proporcyą; Jak się ma wstawa cała do stycznej kąta uważonego, tak się ma odległość dana do wysokości szukaney.

360. *Przyszłos.* 4. Niech będzie wysokość niedostępna, trzeba ią wyznaczyć.

Sposob postępowania naypospoliciey używany, zawisł na tym, aby wymierzyć podstawę iaką wprost tey wysokości, którey szukamy, i naznaczyć kąty pod któremi z obydwóch końców tey podstawy, widziemy wysokość szukaną. Można ztąd doyść, tak wysokości, iako też i odległości iey spodka, od obydwóch końców podstawy.

Fig. 4. Niech SP wyraża wysokość, a AB podstawę wymierzoną wprost ku tey wysokości. Wyznaczmy kąty A i B, przez perspektywy, iednę poziemnie ustawioną, a drugą ku wierzchołkowi S, wykierowaną.

W Troykącie ASB, zachodzi ta proporcya.

Wst: ASB: wst. A = AB : BS.

W Troykącie BSP, iest;

Wst: cała: wst. B = SB: SP.

Więc wst: cała × wst. ASB: wst: A × wst. B = AB : SP.

361.

361. *Uwaga 1.* Tego sposobu używaiąc, można nayprzod uchybić w braniu takiey podstawy, którąby przedłużona prosto prowadziła, do wysokości podaney do wymierzenia; ponieważ zaś w wielu przypadkach trudno iest utrafić na takie podstawy położenie, będzie więc i wysokość ztąd wyrachowana, niepewna. Powtore, gdy podstawa AB, iest bardzo nachylona względem linii AS, BS, kąt ASB, pod którym pokazuie się ta podstawa AB, iest bardzo mały względem kąta ASP, a zatym i podstawa AB wymierzona iest bardzo mała względem całey podstawy AP; zkąd także wyznaczenie wysokości PS będzie mniey dokładne.

362. *Uwaga 2.* Gdy narzędzie, którego używamy, opatrzone iest w półkole pionowe, to będzie służyć do dania tak dobrego podstawie położenia, iakiego tylko grunt pozwoli.

Niech liniia AB wyraża iakąkolwiek podstawę wymierzoną, a liniia SP, niech wyraża wysokość, którey szukamy. *Fig. 5.*

Ustawiwszy półkole pionowe tak, aby Prawidło ruchome zmierzało ku punktowi S, a zatym, aby liniia SP, wpadała na płaszczyznę tego półkola; uważamy

kąt SAP na płaszczyznie pionowey, i kąt PAB wyznaczony na płaszczyznie kątomierza poziemnie ustawionego. Zrobmy to samo i na drugim stanowisku, przy punkcie B.

W Troykącie PAB, gdzie wiadoma iest podstawa, i wszystkie kąty, będzie:

Wst. APB: wst. ABP = AB: AP.

W Troykącie prostokątnym SAP, iest:

Wst. cała: styczna SAP = AP : SP.

Więc wst. cała × wst. APB: wst. ABP × styczn. SAP = AB: SP.

Gdyby nawet dla iakiey zawady nie można razem brać kątów pionowych, i kątów poziemnych; tedy iednak wyznaczaiąc ciąg linii AP, BP, możnaby osobno wymierzyć kąty poziemne: PAB, PBA. Z tym wszystkim wyznaczenie tego ciągu z wielką częstokroć pracą przychodzi.

363. *Przykład.* 5. Niech będzie dana linia na iakim gruncie, i niech będzie wysokość niewiadoma, z którey wierzchołka można widzieć końce tey linii daney. Trzeba wyznaczyć odległość tych dwoch

końców, od spodka wysokości niewiadomey, i tęż samę wysokość.

1. Uważaymy z wierzchołka wysokości, kąty na płaszczyznie pionowey, zawarte między linią pionową, albo nitką z ciężarem zawieszoną, i między perspektywą wykierowaną następnie do dwóch końców linii daney. Odległości tych końców, od spodka wysokości, tak się do siebie mieć będą, iak styczne kątów uważanych; (będą zaś te odległości stycznemi kątów tych wyznaczonych, gdy wysokość za promień wzięta będzie,) a z tym stosunek tych odległości będzie wiadomy. Uważaymy i ten kąt, który się zrobi na płaszczyznie poziemney kątomierza, przez płaszczyzny pionowe, na których znaydować się będzie perspektywa następuie do tych dwóch punktów kierowana. Ten kąt równy kątowi zawartemu między dwiema liniiami prowadzonemi od końców podstawy do spodka wysokości, będzie kątem w wierzchołku Troykąta, maiącego wiadomą podstawę i wiadomy stosunek ramion, a zatym można ten Troykąt zupełnie wyrachować.

Uwaga. Gdy narzędzie tak iest zrobione, że go nie można użyć do mierzenia kąta zawartego między liniiami, któ-

reby od ſpodka wyſokości prowadzone były do dwóch końców Podſtawy; w takim razie, trzeba mieć wiadomą wſzyſtkich tych trzech punktów odległość; wyiąwſzy, gdyby dwa końce podſtawy, były w iedney linii z ſpodkiem wyſokości. (l)

PRZYDATEK II.

Pierwſze początki równoważenia.

W pierwſzych początkach, na ktorych ſię równoważenie (libellatio) zaſadza, można uważać ziemię, iakoby ta zupełnie miała figurę kuli. Rożnica zachodząca między tą mniemaną, a prawdziwą iey figurą (ſzpłaſzczoną w końcach Oſi) bardzo mało wpływa w działaniania, o ktorych tu mówić ſię będzie; wiadomości zaś potrzebne do czynienia w rachunkach, poprawy z przyczyny nie zupełney ziemi okrągłości, byłyby teraz niewczeſne i nad poięcie Uczniów.

264.

(l) *Gdyby nie było ſpoſobności czynić na gruncie działań, wyrażonych w tych oſtatnich przyſtoſowaniach, tedy dla łatwieyſzego uczniow poięcia, można działania te na figurach wyrobionych z drzewna wykonywać.*

264 Uważaiąc Ziemię, iak gdyby zupełnie była okrągłą, i przeciąwszy ią płaszczyzną przez środek iey przechodzącą; przecięcie to byłoby kołem, którego promień byłby tenże sam, co i promień ziemi. Na okręgu tego koła podzielonym na 360 stopniów, rachuiąc mil Niemieckich 15. (które się nie wiele różnią od Polskich) na ieden stopień; cały ten okrąg zawierać w sobie będzie mil Niemieckich 5400, a zatym średnica iego, to iest średnica ziemi mieć będzie długości mil prawie 1719. albo, rachuiąc ogrągło: 1720.

Tę długość na mnieysze miary Polskie z Niemieckich zamieniaiąc (sposobem w Arytmetyce podanym) będzie średnica ziemi, więcey cokolwiek niż:

21000000, łokci Polskich.

7000000, sążni

2800000, prętów

280000, sznurów.

365. Mowi się, że dwa mieysca są do *równowagi* (ad libellam,) gdy równą maią od środka ziemi odległość. Y tak powierzchnia wody stoiącey, wszystkie punkta ma do równowagi.

Gdy

Gdy liniia iaka proſto padłą ieſt w punkcie powierzchni ziemi do iey promienia, przez ten punkt przechodzącego; ta liniia procz iednego tego punktu ſpolnego z promieniem, którego odległość od środka, równa ſię promieniowi ziemi, wſzyſtkie inne ſwoie punkta, dalſze mieć będzie w rzeczy ſamey od środka ziemi; ale że przy takiey wielkości promienia ziemi, różnica położenia tey linii, okazuiącey *równowagę pozorną* (libella apparens) od położenia wody ſtoiącey, która okazuie *równowagę prawdziwą* (libella vera) ta mowię różnica tak ieſt mała, że chyba w znaczney bardzo odległości da ſię poſtrzedz, przeto w zwyczayniey ſzych działaniach, można na tę różnicę względu nie mieć, i równowagę pozorną za równowagę brać prawdziwą.

W odległości 900. łokci, albo 300 ſążni, różnica ta nie dochodzi 1. cala.

Fig. 6. Jakoż niech promień CA, wyraża promień ziemi, liniia AB. niech wyraża ſtyczną do końca tego promienia prowadzoną, a bardzo małą względem niego. Niech BDCd wyraża liniią, ciągnioną przez punt B, i przez środek ziemi, ſpotykaiącą iey powierzchnią w punktach: D. i d. Będzie $AB^2 = DB \times Bd$; aże liniia BD

ieſt

iest bardzo mała względem linii Bd, będzie prawie $AB^2 = Dd \times BD$; a $BD = \frac{AB^2}{Dd}$.

Niechby AB, zawierała w sobie łokci 900, znaydziemy BD mnieyszą od $\frac{1}{27}$. części łokcia, to iest mnieyszą od cala.

Linija ta BD iest prawie proporcyonalną kwadratowi linji AB; a zatym w odległościach, 2,3,4,5, i t. d. razy mnieyszych od 900. łokci, będzie, 4,9,16,25, i t. d. razy mnieyszą od cala.

366. Lubo nierówności na powierzchni ziemi, są bardzo małe względem wielkości całey ziemi, a zatym można na nie względu nie mieć w niektórych okolicznościach; te iednak nierówności wiele się przykładaią do odmian, które na ziemi postrzegamy. Gdyby nap: ziemia była Matematyczną kulą, to iest zupełnie okrągłą wody wszystkie na iey powierzchni znayduiące się byłyby stoiącemi; nie byłoby ani rzek, ani strumyków, ani zrodeł wytryskuiących i sztuką tylko możnaby wody z iednego mieysca na inne sprowadzać.

367. Przez działania równoważenia, wyznaczaią się te nierówności, czyli różnica

żnica, która zachodzi między odległością od środka ziemi, dwoch, albo więcey punktów. Przeto dochodzenie iakieykolwiek wyfokości, możnaby fobie wyftawić pod ogulnym tym wyobrażeniem działań równoważenia; zwyczaynie iednak działania te daley fię nie rozciągaią, iak do wyznaczenia pomnieyfzych wyfokości, a fzczegulniey do fprowadzenia wód z iednego mieyfca na drugie; co obfzerniey zwykło fię wykładać w Fizyce.

W działaniach równoważenia, używane fą niektóre narzędzia, fłużące do wyznaczenia linii proftey ukazuiącey równowagę pozorną. Tych wfzyftkich narzędzi w opifanie, wieleby tu mieyfca zabrało, (m) wyrażą fię iednak potrzebnieyfze.

368. Równowaga wodna, iedna z nayprościeyfzych, fkłada fię z rurki mofiężney

(m) *Dokładne i obfzerne opifanie tych narzędziów, znayduie fię w Kfiązce P. Pikarda o równoważeniu, która z wielą przydatkami wyłożona ieft z Francuzkiego na Niemiecki ięzyk przez P. Lamberta. Wiele także doczytać fię można w kfiążce napifaney w tey materyi przez P. Le Feburę.*

żney, albo blaszaney, i z dwóch butelek szklannych iak nayprzezroczyftszych, przy końcach teyże rurki przypławionych: Woda w tych butelkach zawarta przechodzi przez rurkę, i w równey w obydwóch butelkach utrzymuie się wysokości. Osadzana bywa taka równowaga na nodze drewnianey, podobnie iak stolik mierniczy, albo kątomierz.

369. Używanie iey na tym się zasadza, że woda przez otwarcie iakie łączące dwa lub więcey naczynia, przechodząca z iednego do drugiego, układa się do równowagi. Z wielką iednak ostrożnością używać potrzeba, tey tu opisaney równowagi, gdy bez pomocy perspektyw, gołym okiem do powierzchni wody przystawionym, celuiemy do iakiego mieysca.

370. Układ równowagi powietrzney zasadza się na własności powietrza, ile lekszego od wody. Przez tę własność, powietrze w rurce wraz z wodą zamknięte, wychodzić nad wodę musi.

Jest to ieden z naylepszych sposobów do ustawienia, podług równowagi, prawidła, albo raczey perspektywy do niego przyprawioney.

Równo-

Równowagi powietrzne do wielkiey doskonałości można przyprowadzić, iako to, opisuiąc równowagę Brandera, obszernie wywodzi P. Lambert w przydatkach swoich do kśiążki Pikarda. Robią ieszcze i równowagi próżne, to iest takie, z których powietrze iest wyciągnione.

Te równowagi za świadectwem X. Fontany, naymnieyszą nawet nierówność poznać daią.

371. Do wykierowania linii, prawidła, lub perspektywy, podług położenia poziemnego służy też i nić, która przez ciężar w końcu iey zawieszony do pionu się układa.

Ta nić ponieważ iest prostopadłą do linii iakieykolwiek poziemney, na tey więc zasadzie robić zwykli, innego ieszcze gatunku równowagi, nazwane równowagami *Pikarda*, *Huyghensa* i t. d.

372. Do działań równoważenia, potrzebny także iest pręt podzielony na łokcie, cale i t. d. na który wkłada się znak z papieru grubego, lub inny podobny, mogący się posuwać wzdłuż pręta; a na środku tego znaku ma być cel wyrażony, któryby i z daleka rozeznać można.

373.

373. Niech będą dwa iakiekolwiek mieyſca, których różność równowagi trzeba znaleść.

Poſtawmy narzędzie na iednym z tych mieyſc, a na drugim pręt na łokcie, cale i t. d. podzielony. Perſpektywę poziemnie, czyli do równowagi uſtawioną kieruymy ku prętowi; do którego znak przyprawiony, ma być przez inną oſobę ſpuſzczany, lub podnoſzony poty, poki środek tego znaku nie przypadnie w linii proſtey, którą poziemne perſpektywy położenie wyznacza. Jeżeli wyſokość tego środka znaku, od ſpodka pręta rachowana, będzie równa wyſokości perſpektywy rachowaney od ſpodka nogi, na którey całe narzędzie z perſpektywą ieſt wſparte, tedy dwa te mieyſca będą do równowagi. Jeżeli zaś wyſokość środka znaku będzie większa, lub mnieyſza od wyſokości perſpektywy, tedy ſpodek pręta będzie tyle niżſzy lub wyżſzy od ſpodku nogi narzędzia, i ta ieſt różnica między temi dwiema wyſokościami.

Tego ſpoſobu równoważenia używać tylko można w odległościach na 100, a naywięcey na 200, ſążni.

W większych odległościach, uchybienia byłyby znacznieyſze, tak z przyczyny zbo-

zboczenia światła łamiącego się w powietrzu, iako z niedokładności narzędzia, które w większych odległościach większe też sprawuie uchybienie, a nakoniec i z przyczyny różnicy, zachodzącey między prawdziwą i pozorną równowagą.

374. Po części można się ustrzedz tych uchybień, a raczey one zmnieyszyć, stawiaiąc narzędzie w równey, ile być może, odległości, między dwoma mieyscami, które równoważyć mamy. Obu dwóch tych mieysc trzeba wyznaczyć równowagę względem tego średniego stanowiska. Ponieważ zaś różnica wysokości środka znaku na dwóch tych mieyscach postawionego, iest różnicą tychże mieysc wysokości, iedney względem drugiey, tą więc różnicą będzie wyższe od drugiego to mieysce, w którym znak niżey iest położony.

Przez to dwoiakie działanie, można z iednego stanowiska równoważyć dwa iakie mieysca, których odległość zawierałaby nap. 300. sążni, a zatym iużby nadto wielka była, aby w niey pierwszego do równoważenia sposobu użyć godziło się.

375. Gdy mieysca do równoważenia wyznaczone, są ieszcze odleglevsze, nap.

na

na iednę, lub dwie mile dalekie, iedno od drugiego, można tę przywiększą odległość podzielić na części, z których każda zawierałaby około 300. sążni; a dopiero z pośrodka każdey tey mnieyszey odległości, równoważyć iey końce, czyli granice.

Przez pierwsze takowe działanie, znaydziemy różnicę pierwszego punktu wysokości od drugiego następuiącego. Przez drugie działanie znaydziemy różnicę wysokości tego drugiego punktu od trzeciego, y tak daley; aż na koniec znaydziemy różnicę wysokości przedostatniego punktu od ostatniego, który kończy całą odległość, a tym samym doydziemy też y różnicy wysokości pierwszego punktu od ostatniego, to iest doydziemy różnicy wysokości między iednym i drugim końcem całey odległości.

376. Gdyby się zdarzyło, że postępuiąc od każdego punktu podziału, do innego iemu naybliższego, każdy taki punkt następny byłby wyższy lub niższy od poprzedzaiącego, z którym się w równoważeniu porównywa, tedy summa różnic wysokości między iednym i drugim punktem następnym pokazałaby całą różnicę między wysokością dwóch punktów kon-

kończących całą odległość. Ale ieżeli te punkta następne, są na przemiany iedne wyższe, a drugie niższe względem tych, z któremi się przy każdym działaniu porównywaią, tedy wziąść trzeba summę różnic wysokości punktów wszystkich, które przy każdym następnym działaniu są wyższe, od tych, z któremi ie porownywamy (postępuiąc zawsze od iednego końca całey odległości, do drugiego) Trzeba ieszcze wziąść i summę różnic wysokości punktów wszystkich, które przy każdym działaniu następnym są niższe od tych, z któremi się porownywaią (w tę samę stronę co y pierwey postępuią:)

Jeżeli te dwie summy będą równe, znakiem to będzie, że obadwa całey odległości końce są do równowagi. Jeżeli zaś te dwie summy bedą nie równe, tedy ostatni koniec odległości, tyle wyższy, lub niższy będzie od pierwszego, ile pierwsza summa większa lub mnieysza iest od drugiey.

377. Aby nie być obowiązanym porównywać przy każdym stanowisku, wysokości dwóch punktów przypadaiących do równoważenia, lepiey iest, że dway pomocnicy rachować będą wysokość znaku,

ku, i onę dla pamięci zapisywać po każdym szczegulnym działaniu. Jedna z tych wysokości naznaczonych, będzie służyć do porównania iey z inną następną, która ieszcze nie iest znaleziona. Ci dway pomocnicy postępować będą po każdym szczegulnym działaniu, ku drugiemu końcowi całey odległości; ten, który wprzody poydzie, stanie przy następuiącym punkcie podziału, a drugi stanie przy punkcie od pierwszego opuszczonym.

Po skończonych tych wszystkich szczegulnych działaniach, zbierze się wraz summa wysokości od pierwszego pomocnika naznaczonych, i podobnie wiedną summę zbiorą się wysokości naznaczone od drugiego pomocnika. Różnica tych dwóch summ, będzie różnicą wysokości dwóch punktów skraynych, któreśmy równoważyć postanowili. Ten zaś punkt będzie wyższy od drugiego, któremu odpowiadaiąca summa będzie mnieysza.

378. Co się tycze równoważenia mieysc położonych w Kraiach bardzo odległych; iak nap. gdyby trzeba wyznaczyć różnicę wysokości mieysc położonych przy brzegach Morza śrzodziemnego, od wysokości mieysc innych wśrzod Polski położonych, albo przy brzegach morza Baltyckie-

tyckiego; rozumiem że pewnie o tym mowa będzie w Fizyce. Można w tey mierze czytać między innemi Dzieło wielkie P. De Luc. o różnych umiarkowaniach powietrzni otaczaiącey ziemię (ſur les modifications de l'Atmoſphere.)

ROZDZIAŁ XIII.

O Kwadrowaniu koła, czyli o wynalezieniu Powierzchni Koła.

379. OBwody Wielokątów foremnych podobnych ſobie, tak ſię do ſiebie maią, iak promienie kół w nie wpiſanych, lub na nich opiſanych. Powierzchnie tychże Wielokątów, równaią ſię Troykątom maiącym za wyſokość promienie kół wpiſanych, a za podſtawę obwod Wielokątów. Też powierzchnie Wielokątów foremnych podobnych do ſiebie, tak ſię maią do ſiebie, iak kwadraty promieni kół wpiſanych i t. d. Wſzyſtkie te Twierdzenia nie zawiſły od liczby boków w Wielokątach, i zawſze ſą prawdziwe, chociażby naywiększa była liczba boków.

380. Ztąd zdaie ſię, że prawdziwe będą te wſzyſtkie Twierdzenia, gdyby nawet liczba boków tak wielka była w wie-

wielokątach, żeby ich od kół rozeznać nie podobna, i gdyby promienie kół wpisanych i opisanych różnicy między sobą nie miały, ale iednym promieniem wydawały się. (n)

(n) *Takowe rozumowanie, przywiodło Geometrów, że do koła uważanego za granicę między wielokątem wpisanym i opisanym przystosowali te Twierdzenia, które o wielokątach stanowili. Dosyć podobno będzie przy pierwszym czytaniu tey książki, wystawić uczniom koła, pod tą postacią. Jeżeli iednak przez ćwiczenia poprzedzaiące, ducha dokładności i smaku w niey nabyli przeciwną rzeczą zapewne zdawać im się będzie, przechodzić od wielokąta, choćby z naywiększą liczbą boków, do koła uważanego pod postacią wielokąta takiego, którego liczba boków większa byłaby od iakieykolwiek liczby naznaczoney. Postrzegą oni, i postrzedz powinni skok niezmierny w takowym przechodzeniu; gdyż ściśle mówiąc, linia krzywa nie może być uważana, iako zbior wielu linii prostych bardzo małych, do siebie nachylonych. Należy przeto rzecz tę z większą dokładnością wytłuszczyć tak dla zabieżenia wielu trudnościom, które w tey mie-*

381. *Twierdzenie przybrane* Można zawsze chociaż myślą podzielić ilość iaką na tyle części równych, aby każda ta część w szczególności mnieysza była, niżeli inna iakakolwiek ilość naznaczona.

Dowodz. Pomnożmy tę drugą ilość naznaczoną, tyle razy, ile potrzeba, aby się stała większą od pierwszey ilości daney; na tyleż części równych podzielmy ilość pierwszą, ile razy była pomnożona ilość druga; każda takowa część ilości pierwszey, mnieysza będzie od ilości drugiey naznaczoney.

W szczególności mówiąc, gdy się weźmie połowa ilości iakiey skończoney, i tey połowy połowa, to iest czwarta część całey ilości, i znowu tey ostatniey połowy połowa, to iest osma część całey ilości, daley połowa tey osmey części, to iest: część szesnasta i t. d. dojdzie się na ostatek do takiey części, która mniey-

---

rze zarzucać zwykli niektórzy o świetle rozumu swego i przeniknieniu nadto uprzedzeni, a ledwie w rzeczy samey pierwsze Matematyki początki znaiący, iako też i dla wprawienia młodzi zawczasu w dok dność Matematyczną.

mnieyszą będzie od wszelkiey ilości naznaczoney. (o)

382. *Twierdzenie.* 1. Można opisać na kole danym, i wpisać weń foremne dwa takie wielokąty podobne, aby stosunek ich obwodów przybliżał się bardziey, do stosunku równości, niżeli iakikolwiek inny stosunek nierówności naznaczony.

Przykład. Można wpisać w koło i nanim opisać dwa wielokąty foremne podobne, takie, którychby rożnica obwodów mnieyszа była od dziesiątey naprzykład części obwodu, iednego z nich.

Niech będzie CA promień koła, podzielony na dziesięć części równych, i niech AB iednę taką część wyraża. *Tab. XXII. Fig. 1.*

Przez B przeciągniymy DBd. prostopadą do promienia, i spotykaiącą okrąg koła w punktach D, i d. Podzielmy okrąg koła, na 2, 4, 8, 16 it. d. części równych, poty, poki nie doydziemy do czę-

(o) *Przestrzegać będą Nauczyciele Uczniów, aby zamiast słowa:* naznaczona, *nie używali tego drugiego słowa* naznaczyć się mogąca, *i dadzą im poznać rożnicę tych dwóch wyrazów.*

ści koła mnieyszey od łuku DAd. Niechby naprzykład łuk EAe był iedną z tych części mnieyszych od łuku DAd; i punkt A niechby go dzielił na dwie części równe EA, Ae. Pociągniymy liniią Ee, (kóra będzie prostopadłą do AC) Przez punkt A niech przechodzi styczna FAf, i niechay dwa promienie CE, Ce, schodzą się z tą styczną w punktach F,f. Liniie Ee, Ff, są bokami dwoch wielokątów foremnych podobnych, iednego w koło wpisanego, a drugiego na kole opisanego; a zatym obwody tych dwóch wielokątów będą, iak boki Ee, Ff, albo iak liniie CG, CA. Więc różnica obwodow tych dwóch wielokątów, będzie do obwodu większego wielokąta, iak liniia AG, do linii CA. Aże liniia AG mnieysza iest od linii AB, to iest od dziesiątey części linii CA; więc i różnica dwóch obwodów mnieysza będzie, niżeli dziesiąta część obwodu wielokąta na kole opisanego.

Gdyby liniia AB była $\frac{1}{10}$. linii BC, albo $\frac{1}{10}$. linii AC, możnaby podobnym sposobem dowieść, że różnica dwóch obwodów, tak się ma do obwodu wielokąta w koło wpisanego, iak liniia AG do linii CG. Aże AG. mnieysza iest od AB,

więc

więc tym samym mnieysza iest od $\frac{1}{10}$ tey części linii BC, a tym bardziey mnieysza będzie od 10tey części linii CG. Różnica tedy między dwoma obwodami wielokątów mnieysza byłaby od 10tey części obwodu wielokąta w koło wpisanego. (p)

383. *Wniosek 1.* Można w koło wpisać wielokąt ieden foremny, i drugi podobny na nim opisać, tak; aby stosunek obwodu koła do obwodu iednego z dwóch wielokątów bardziey był przybliżony do stosunku równości, niżeli iakikolwiek inny stosunek naznaczony.

Przykład. Niechby opisany na kole by ieden wielokąt, a drugi podobny w koło wpisany, i niechby różnica ich obwodów mnieysza była od $\frac{1}{10}$ części obwodu wielokąta wpisanego.

Rożni-

(p) *Daie się tu przykład liczebny dla łatwieyszego poięcia. Że iednak te rozumowania uważane w sobie nie zawisły od tych liczb, i mogą być przystosowane do wszystkich innych; przeto dowodzenie nasze nie iest dla tego szczegulnego przystosowania, ani mniey dokładnym, ani mniey ogulnym.*

Różnica obwodu wielokąta opisanego, od obwodu koła mnieysza będzie niż różnica obwodu tegoż wielokąta od obwodu wielokąta wpisanego; to iest mnieysza niżeli $\frac{1}{250}$ część obudwu wielokąta wpisanego, a tym bardziey mnieysza od $\frac{1}{100}$ części obwodu koła.

Rożnica także obwodu koła od obwodu wielokąta wpisanego mnieysza iest, niżeli różnica między obwodami dwóch wielokątów, a zatym mnieysza od $\frac{1}{100}$ części obwodu wielokąta wpisanego, a dopiero mnieysza od $\frac{1}{100}$ części obwodu koła.

384. *Wniosek* 2. Maiąc daną liniią prostą, wziętą za rowną okrągowi koła danego, wpisać w to koło, i opisać na nim wielokąty, których obwodów różnica od obwodu koła mnieysza byłaby, niżeli liniia dana iakieykolwiek małości.

Pomnożmy ostatnią tę liniią tylerazy, aż większą będzie od linii wziętey za rowną okrągowi koła. Niechby naprzykład 10. razy powiększona była ta liniia. Wpiszmy w koło i opiszmy na nim dwa wielokąty foremne podobne, którychby różnica obwodów mnieysza była od $\frac{1}{10}$ części obwodu iednego z nich. Będzie za-

tym

tym różnica obwodu koła od obwodu którегокolwiek z tych dwóch wielokątów mnieyſca niżeli $\frac{1}{10}$ ta część obwodu, iednego z tychże wielokątów, naprzykład obwodu wielokąta wpiſanego; a dopieroż mnieyſza niżeli $\frac{1}{10}$ ta część okrągu koła, a ieſzcze mnieyſza, niż liniia dana wyznaczoney małości.

385. *Twierdz.* 2. Okrągi kół tak ſię maią do ſiebie, iak ich promienie.

Niech będą dwa koła C y c, a tych okrągi O y o, promienie zaś P y p; będzie zatym O : o = P : p.

Gdyby ta proporcya w czym chybiała, tedy pierwſzy ſtoſunek byłby większy lub mnieyſzy od drugiego. W pierwſzym razie trzebaby powiększyć okrąg o, a w drugim okrąg O. aby naprawić proporcyą; a zatym w obydwóch razach trzeba powiększyć ieden z okrągów dla zrobienia proporcyi.

Niechby liniia proſta L, większa była od okrągu O. i niechby było (ieżeli podobna) L: o = P : p.

Opiſzmy na kole C wielokąt foremny, którегoby różnica obwodu, od obwodu koła,

koła, mnieyſza była, niżeli różnica L od O. Na drugim także kole c, opiſzmy wielokąt foremny podobny pierwſzemu. Obwody tych dwóch wielokątów tak ſię mieć będą do ſiebie, iak promienie P y p, kół C y c; albo iak L do o, (ponieważ miało być L : o = P, p.) Aże obwód pierwſzego wielokąta, mnieyſzy ieſt niżeli L, więc i obwod drugiego, mnieyſzyby być powinien niżeli o, to ieſt mnieyſzy niżeli okrąg koła, na którym ieſt opiſany, co być nie może.

Więc ſtoſunek promieni dwóch kół, nie ieſt większy ani mnieyſzy od ſtoſunku ich okrągów, a zatym równy ieſt temuż ſtoſunkowi.

386. *Wnioſek* 1. Idzie zatym, że ſtoſunek okrągu koła iednego, do ſwego promienia, tenże ſam ieſt, co i ſtoſunek któregokolwiek innego koła, do ſwego także promienia.

Przeto gdyby można znaleść ſtoſunek iakiegokolwiek koła, do iego promienia, iuż tym ſamym byłby znaleziony ſtoſunek każdego innego koła do ſwego promienia.

387. *Wnioſek* 2. Dwa proſtokątne Troykąty ſą do ſiebie podobne. Gdy maią

ią za wyſokości, promienie dwóch kół, a za podſtawy liniie wzięte za równe okrągom tychże kół; a zatym takie dwa Troykąty będą do ſiebie w ſtoſunku dwumnożnym ich boków, naprzykład promieni dwóch kół,

388. *Twierdz.* 3. Powierzchnia koła równa ſię powiarzchni Troykąta, maiącego za wyſokość promień tego koła, a za poſtawę, iego okrąg.

Dowodz. Gdyby ten Troykąt, nie był równy powierzchni koła, byłby od niey większy, albo mnieyſzy, a zatym koło byłoby równe innemu Troykątowi teyże ſamey wyſokości, za podſtawę zaśmaiącemu liniią większą, albo mnieyſzą od okrągu koła.

Nazwiymy okrąg koła, O. a tę liniią większą albo mnieyſzą od okrągu, nazwiymy L.

W pierwſzym razie, w którym ta liniia L, większa byłaby od okrągu koła, opiſzmy na nim wielokąt foremny, którego obwod mnieyby ſię różnił od okrągu koła, niżeli ſię różni od niego liniia L; a zatym liniia L, większaby była od obwodu wielokąta. Powierzchnia tego wielokąta

byłaby

byłaby mnieyſza od powierzchni Troykąta maiącego za wyſokość, promień koła, a za podſtawę, liniią L, to ieſt byłaby taż powierzchnia wielokąta, mnieyſza od powierzchni koła, na którym wielokąt ieſt opiſany; co być niemoże.

W drugim razie, w którym liniia L, mnieyſza byłaby, od okręgu koła, wpiſzmy w koło wielokąt foremny, którego obwod mnieyby ſię różnił od okręgu koła, niżeli liniia L. a zatym obwod wielokąta byłby większy od linii L. Wpiſzmy wto ſamo koło wielokąt inny foremny, tyle dwoie co pierwſzy boków zawieraiący.

Powierzchnia tego drugiego wielokąta, równałaby ſię Troykątowi maiącemu za wyſokość promień koła, a za podſtawę obwód pierwſzego wielokąta; (268) to ieſt liniią większą od L.

A zatym powierzchnia tego wielokąta wpiſanego w koło. większa byłaby niżeli powierzchnia koła, co być także nie może.

Więc powierzchnia koła, ani ieſt większa, ani mnieyſza od powierzchni Troykąta maiącego za wyſokość promień

tego

tego koła, a za postawę iego okrąg; a zatym równa iest powierzchni tego Troykąta.

389. *Wniosek* 1. Powierzchnie kół są do siebie w stosunku dwumnożnym ich promieni, albo średnic; przeto gdyby promienie kół były iak liczby: 1, 2, 3, 4, 5, i t. d. powierzchnie tychże kół byłyby iak kwadraty: 1, 4, 9, 16, 25 i t. d.

390. *Wniosek* 2. Powierzchnia koła, tak się ma do powierzchni wielokąta na nim opisanego, iak okrąg koła, do obwodu wielokąta. A w szczególności powierzchnia koła, tak się ma do powierzchni kwadratu na nim opisanego, albo, co na iedno wychodzi, do kwadratu średnicy, iak się ma okrąg koła, do obwodu tego kwadratu; to iest, iak się ma okrąg koła, do swoiey średnicy cztery razy wziętey, czyli do linii tak długiey, iak cztery średnice.

Ztąd porownanie dokładne powierzchni koła, z powierzchnią kwadratu, a za tym i porownanie koła z powierzchnią iakiey-kolwiek figury prostokreślney, zawisło od porównania okręgu koła z liniią iaką prostą, albo (co na iedno wychodzi) *kwadrowanie* koła, zawisło od *wyprostowania* iego okręgu, czyli od wynalezienia linii prostey równey okręgowey koła.

391.

391. *Wniosek* 3. Wszystkie sposoby postępowania, które się wyżey podawały, do zrobienia kwadratu równego summie, albo różnicy dwóch innych kwadratów danych, końcem powiększenia lub zmnieyszenia kwadratu w danym stosunku, mogą być równiey do kół przystosowane, czyniąc na ich promieniach lub średnicach, te same działania, któreby się na nich czyniły, gdyby były bokami kwadratów, na których podobne odmiany czynić przypadałoby.

A w szczególności, chcąc podzielić powierzchnią koła danego, na pewną liczbę części równych, przez *koła spółśrodkowe* (circuli concentrici); trzeba podzielić promień jego na tyleż części równych, zacząwszy od środka, tak, aby odległości punktów podziału coraz dalszych od tegoż środka, były do siebie iak kwadraty liczb następnych 1, 2, 3, 4, 5, i t. d. Niechby nap. przypadało podzielić koło na 7. części równych przez koła spółśrodkowe. Podzielmy promień na 7. części równych; średnie Geometryczne między odległościami punktów podziału od środka, i całym promieniem, będą promieniami kół, spół środkowych, przez które podzielona będzie powierz-

wierzchnia koła danego, na 7. części równych.

392. Wyznaczenie powierzchni wycinków, i odcinków kół, zawiſło także od wyznaczenia okrągu koła. Jakoż w ſamey rzeczy.

1. Powierzchnia, wycinka tak ſię ma do powierzchni koła, do którego ten wycinek należy, iak ſię ma łuk wycinka, do okrągu koła; to ieſt iak ſię ma Troykąt, którego wyſokością ieſt promień, a podſtawą, ten łuk, do Troykąta maiącego za wyſokość tenże promień, a za podſtawę okrąg koła. Aże ten oſtatni Troykąt byłby równy powierzchni koła, więc i pierwſzy Troykąt równy ieſt powierzchni wycinka.

2. Odcinek mnieyſzy od pół koła, ieſt rożnicą między wycinkiem maiącym tenże ſam łuk, co i odcinek, i między Troykątem równoramiennym maiącym ſpolną z wycinkiem podſtawę wierzchołek, zaś w środku koła.

Aże powierzchnia wycinka, równa ſię Troykątowi maiącemu za wyſokość promień, a zapodſtawę łuk wycinka; a powierzchnia Troykąta o którym mowa (wziąwſzy w nim za podſtawę, ieden z

ſpro-

promieni to iest z ramion iego, aza wyso-kość wstawę łuku należącego do wycinka) równa się Troykątowi maiącemu za wysokość promień, a za podstawę wstawę łuku; więc powierzchnia odcinka mnieyszego od połkola równać się będzie Troykątowi maiącemu za wysokość, promień, a za podstawę różnicę łuku wycinka od wstawy tegoż łuku. Arytmetycznie ta powierzchnia wyraża się rozmnożeniem liczby oznaczaiącey połowę promienia, przez inną liczbę oznaczaiącą różnicą łuku wycinka od wstawy tegoż łuku.

Powierzchnia odcinka większego od połkola, iest summą z wycinka zawieraiącego między swemi ramionami ten sam łuk większy od połkola, i z Troykąta, w którym, wziąwszy za podstawę promień, wysokością byłaby wstawa łuku czyniącego z łukiem pierwszym okrąg cały; a zatym powierzchnia tego odcinka, równa się Troykątowi maiącemu za wysokośc promień, a za podstawę, summę z łuku odcinka tego, i z wstawy łuku, który spełnieniem iest pierwszego łuku do całego okrągu, albo, (co na iedno wychodzi) z wstawy różnicy między łukiem odcinka, i półokrągiem.

393. *Definic*: W kołach nieiednakowego promienia, wycinki i odcinki podobne,

te

te ſą, których łuki ſą do ſiebie podobne, to ieſt równą ſtopniów liczbę w ſobie zamykaią; a te łuki tak ſię maią do ſiebie, iak całe okrągi, a zatym iak promienie tychże kół.

394. *Twierdz.* 4. Wycinki i odcinki podobne w kołach nieiednakowego promienia, tak ſię maią do ſiebie, iak koła, do których należą.

Fig. 2.

1. Niech będą dwa wycinki podobne ABCDA, abcda, te dwa wycinki ſą do ſiebie iak koła, do których należą.

Dowodz. Wycinek ACBDA, tak ſię ma do koła, do którego należy, iak łuk ADB, do okrągu ADBEA, albo (393) iak łuk adb, do okrąku adbda, to ieſt, iak wycinek acbda, do koła, do którego należy. Więc te dwa wycinki ſą do ſiebie iak koła, do których należą, to ieſt w ſtoſunku dwumnożnym promieni tychże kół.

2. Niech będą dwa odcinki: ABDA, abda, podobne, te dwa odcinki tak ſię maią do ſiebie, iak koła, do których należą.

Dowodz. Wycinki ACBDA, acbda, maią ſię do ſiebie w ſtoſunku dwumnożnym

nym promieni CA, ca, to ieſt iak CA^2. do ca^2. Troykąty podobne: ACBA, acba, w tymże ſamym ieden do drugiego ſą ſtoſunku; więc te dwa wycinki tenże ſam do ſiebie maią ſtoſunek, co i te dwa Troykąty. Więc różnica (albo ſumma) pierwſzego wycinka, i pierwſzego Troykąta, to ieſt odcinek ABDA, tak ſię ma do różnicy (albo do ſummy) drugiego wycinka i drugiego Troykąta, to ieſt do odcinka abda, iak ſię ma pierwſzy wycinek do drugiego; to ieſt w ſtoſunku dwumnożnym promieni koł, do których te odcinki należą.

395. *Defin.* Niech będą dwa koła ſpołśrodkowe, mieyſce zawarte między ich okrągami, nazywa ſię Koroną.

396. *Twierdz.* 5. Powierzchnia iedney takiey korony równa ieſt proſtokątowi maiącemu wyſokość równą ſzerokości tey korony, a podſtawę równą okrągowi koła, którego promień równałby ſię połowie ſummy promieni okrągów dwoch koronę tę zawieraiących.

Fig. 3. Niech będą CA, CB, promienie dwóch koł ſpołśrodkowych; przedzielmy AB na dwie równe części w F, linija CF, będzie połową ſummy dwóch promieni CA, CB

CB należących do dwóch kół ſpołśrodkowych; korona zawarta między temi kołami, równa ieſt proſtokątowi maiącemu ſzerokość AB tey korony za wyſokość, a za podſtawę okrąg, którego liniia CF byłaby promieniem. Poprowadźmy AD proſtopadłą do AC, i daymy, że AD równa ſię okrągowi, którego promieniem ieſt CA. Złączmy punkta C, i D, liniią CD, a przez punkta B i F. pociągniymy dwie liniie rownoodległe od AD, aż do ich ſpotkania ſię z liniią CD, w punktach E, i G.

Ponieważ CA : CB = AD : BE

i CA: CB = okrąg: CA:okrąguCB.

więc - AD : BE = okrąg CA: okrąguCB.

Aże AD wzięta ieſt za liniią równą okrągowi, którego CA ieſt promieniem, więc i BE = okrągowi CB.

Podobnym ſpoſobem dowieść można, że linia FG, równa ieſt okrągowi, którego promieniem byłaby liniia CF.

Powierzchnie kół, których promieniami ſą CA, i CB, równaią ſię Troykątom, CAD, i CBE, a zatym powierzchnia ko-

rony równa będzie czworokątywi ABED. Przez G poprowadźmy równoodległą od AB, któraby spotkała AD w H, a BE w J; Troykąty prostokątne GDH, GEJ, maią boki GH. GJ, równe, i kąty równe, więc mogą przystać do siebie; a zatym summa z Piąciokąta BEGHA, i z Troykąta GEI, to iest Prostokąt ABIH równa się summie z Piąciokąta BEGHA, i z Troykąta GDH, to iest, równa się czworokątowi BEDA. Aże ten czworokąt równy iest powierzchni korony, więc taż korona równa będzie prostokątowi ABIH, to iest prostokątowi, który ma szerokość korony za wysokość, a za podstawę, okrąg w którym, promieniem iest średnia arytmetycznie proporcyonalna, między dwoma promieniami, czyli połowa summy tychże dwoch promieni.

397. Podobnie i różnica w kołach spółśrodkowych, wycinków dwoch, zawartych między temiż, samemi promieniami, równa się Prostokątowi maiącemu za wysokość różnicę dwóch promieni, a za podstawę łuk podobny łukom wycinków dwoch danych, i należący do okręgu, którego promień, iest średnim arytmetycznym między promieniami tych dwoch wycinków.

1. Pokazawszy, iż zkwadrowanie koła, lub części iego, zawisło od wyprostowania iego okręgu; przystąpmy do szukania tego sprostowania.

Zadanie to aż nazbyt wsławione, zatrudniło wielu przypisuiących sobie nazwisko Geometrow, którym ledwie początki Matematyki były znaiome, a i zadania nawet samego nierozumieli W czym było omylne ich rozumienie, bawić się nad tym, nie sądzę być rzeczą potrzebną. Mogą Nauczyciele, chcący mieć obszernieyszą w tey mierze wiadomość, czytać Montukli przemowę do *Historyi o dochodzeniu kwadrowania koła* (Histoire des recherches sur la quadrature du Cercle:) Dosyć będzie powiedzieć, że treść tego zadania na tym zawisła, aby wynaleść liniią prostą równą okrągowi koła podanego. Nie rozumi się tu zaś równość pozorna, i zmysłowa (iak ci mniemaią, ktorzy koło zdrewna lub z kruszca wyrobione tocząc po iakiey płaszczyznie, mierzą długość linii, którą punkt ieden tego koła przebiegł; albo którzy koło iakie nicią okręcaią, i biorą potym długość tey nici; albo na koniec, którzy ważą takowe koło, i one porównywaią z kwadratem podobney materyi, i iednakowey z kołem grubości:) ale się rozumie

równość umyślowa, czyli taka, o której możnaby się przeświadczyć przez rozumowania podobne tym, iakich używaliśmy do dowiedzenia prawd, w tym przeciągu dzieła, wyłuszczonych.

398. Archimedes trzysta lat blisko przed Narodzeniem Chrystusa znalazł stosunek okręgu do średnicy, tak bliski prawdziwemu, że we zwyczaynych zdarzeniach iest dostatecznym, a przytym, i w używaniu wygodnym. Dozedł on, że oznaczywszy średnicę koła przez 1. Okrąg iego większy będzie niż $3\frac{10}{71}$. a mnieyszy niż $3\frac{1}{7}$. albo, że wyraziwszy długość średnicy przez 497, okrąg będzie większy niż 1561, a mnieyszy niż 1562; uchybienie zatym byłoby naywięcey w części $\frac{1}{1785}$ całego okręga; a którégokolwiek ze dwóch stosunków używszy, nap. ostatniego, ten wypadłby na stosunek 7 do 22.

Poźniey po Arhimedesie, wynaleziono sposoby krótsze, któremi dochodzi się stosunków bardziey ieszcze zbliżonych do prawdziwych. Do tey nawet dokładności iuż przyszło, że wyraziwszy średnicę koła przez 1, z zerami 127 przydanemi, wynaydzie się okrąg w liczbie złożoney

ney z tyluż znaków liczebnych, z uchybieniem mnieyszym od iedności ostatniego, a naymniey wyrażaiącego znaku teyże liczby. Sposob iednak dochodzenia z tą dokładnością ważności okrągu koła, nie może być w tych początkach U. czniom wykładany. Przytoczemy iednak stosunki niektóre wygodnieysze średnicy-koła do okrągu, wyięte z Księgi sławnego P. Huyghens o wynalazkach wielkości koła (de circuli magnitudine inventa). Używaiąc Dwonasto kąta wpisanego w koło, i na kole opisanego, można wynaleść dokładnieysze stosunki średnicy koła do okrągu, niżeli te których doszedł Archimedes przez wielokąty o 96 bokach, wpisane w koło, i na nim opisane; ale na to mieysce rachunek Archimedesa mniey wyciąga poprzedzaiących podań, niżeli rachunek na dwunastokącie czyniony.

399. Stosunki średnicy do okrągu koła przybliżone do prawdziwych, są następuiące.

7 do 22.
100 do 314.
106 do 333.
113 do 355. (q)

Ponie-

(q) *Napisawszy trzy pierwsze niepa*

Ponieważ ſtoſunek powierzchni koła, do kwadratu średnicy iego, ten ſam ieſt, co ſtoſunek okrągu koła do średnicy cztery razy wzięty; więc ſtoſunki powierzchni koła do kwadratu średnicy będą następuiące.

22 do 28, albo, 11, do 14.

314 do 400, albo 157, do 200.

333 do 424.

355 do 452.

Czyniąc przybliżenia dokładnieyſze, lecz bardziey zawiłe, i używaiąc ſpoſobów krotſzych, ale początkowe wiadomości przechodzących, znaleziono, iż okrąg koła zawiera w ſobie średnicę, razy 3,14159265358$\frac{1}{2}$.

Zkąd wynika ſtoſunek powierzchni koła, do kwadratu średnicy, albo ſtoſunek okrągu

---

rzyſte liczby 1. 3. 5. *podwa razy, iednę przydrugiey, tak:* 113355 *liczba* 113, *zawieraiąca trzy pierwſze znaki, wyrażać będzie średnicę; liczba zaś* 355. *zawieraiąca trzy oſtatnie znaki, wyrazi z małym uchybieniem okrąg koła.*

okręgu koła do średnicy iego, cztery razy wzięty, równy stosunkowi 3,14592653$\frac{5}{7}$ do 4, albo 3141592653$\frac{5}{7}$ do 4000000000.

Z czterech powyżey wyrażonych stosunków średnicy do okręgu koła; pierwszy daie okrąg koła większy razy

3,1428 od średnicy,

drugi 3,1400.

trzeci 3,141509,

czwarty 3,14152992

Widziemy tu, iż stosunek pierwszy, daie okrąg koła nad to wielki, drugi i trzeci daie ten okrąg nadto mały, a czwarty, znowu nad to wielki; trzeci iednak i czwarty stosunek dokładnieyszy iest od dwóch pierwszych, a zwłaszcza czwarty, który ieszcze w milionowych cząstkach daie okrąg koła nie rożniący się od ważności iego wyżey podaney (r) a iak naysciśley wyrachowaney.

400

(r) *W drugiey Księdze* Pamiętników (*Memoires*) *Matematycznych P. Lamberta, znayduie się wyborna* Rosprawa (Dissertatio) *o kwadrowaniu koła. Do-*

400. Z tego co poprzedzało, łatwo iest rozwiązać przez przybliżenie, następuiące zagadnienia.

1. Maiąc daną średnicę koła, znaleść iego okrąg.

2. Maiąc dany okrąg koła, znaleść iego średnicę.

3. Maiąc daną średnicę koła, znaleść iego powierzchnią.

4. Maiąc daną powierzchnią koła, znaleść iego średnicę.

5. Znaleść bok kwadratu równego kołu danemu.

Znayduiemy, iż stosunek średnicy koła do boku kwadratu równego temu kołu, iest, 200000, do 177245 $\frac{5}{6}$ $\frac{1}{2}$.

Ten stosunek przybliża się bardzo do stosunkow następuiących.

-	-	-	35 do 31.
			44 do 39.
			123 do 109.
			157 do 148.

Ma-

---

wodzi tam (§9) *Autor, że ieżeli możnaby wyznaczyć stosunek dokładny, okręgu koła do średnicy iego, tedy liczby, któreby go wyrażały, większeby być powinny od następuiących, które ten stosunek przybliżony wyrażaią to iest:* 101951-4486099146. do 324 521 540 032 945.

6. Maiąc dany promień koła, i ważność kątową tego łuku, (to ieſt w ſtopniach) znaleść długość tego łuku, i powierzchnią wycinka, proporcyonalną temu łukowi.

7. Maiąc dany promień koła, i ważność kątową łuku, znaleść odcinek między tym łukiem i cięciwą iego.

Naylatwiey i nayprościey rozwiążemy to oſtatnie zagadnienie, gdy w Troykącie, który ieſt różnicą między wycinkiem i odcinkiem wſpieraiącym ſię na tymże ſamym łuku, weźmiemy za podſtawę ieden z promieni, a za wyſokość wſtawę łuku danego; maiąc albowiem tę proporcyą, że powierzchnia koła, tak ſię ma do powierzchni odcinka (mnieyſzego od połkola) iak ſię ma okrąg cały do rożnicy między łukiem odcinka, i wſtawą tego koła; i ułożywſzy ſobie tablicę łuków koła, podług promienia tablic Trygonometrycznych, łatwo przyidzie rozwiązać to zagadnienie. (s)

8.

(s) *Co ſię tycze ſpoſobu ułożenia takowych tablic, obacz przykłady dane w Arytmetyce.*

8. Znaleść przez przybliżenie wartość kątową łuku równaiącego się promieniowi koła.

Przystosowanie tego zagadnienia często bywa używane w wyższych częściach Matematyki.

Fig. 1.

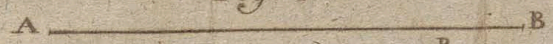


Fig. 2.

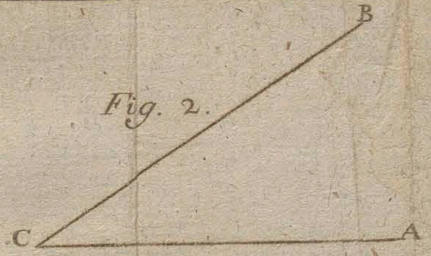


Fig. 3.

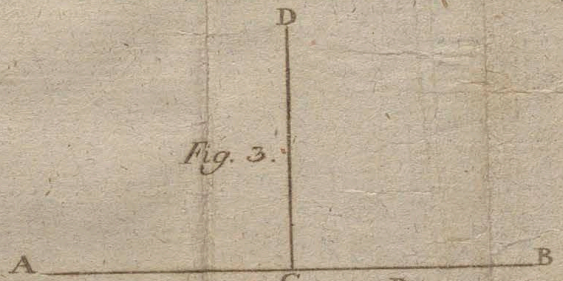


Fig. 4.

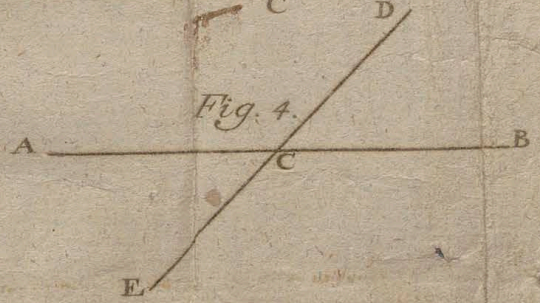


Fig. 5.

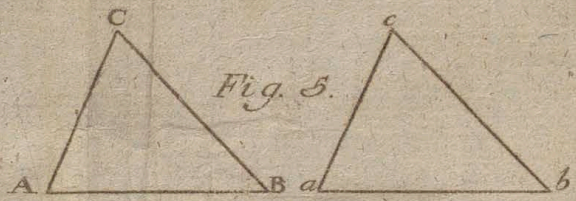


Fig. 6.

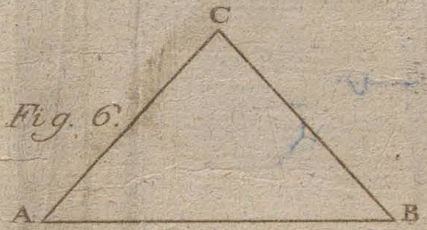


Fig. 7.

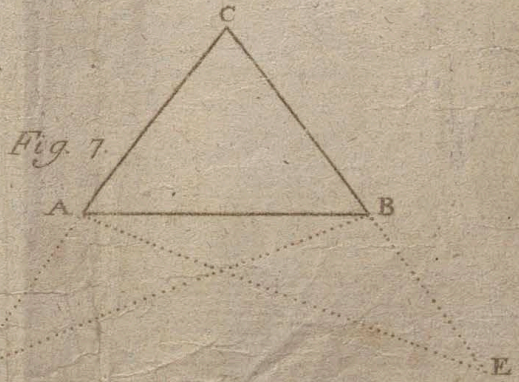


Fig. 1.

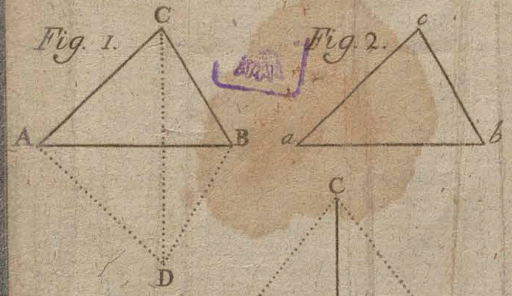


Fig. 2.

Fig. 3.



Fig. 4.

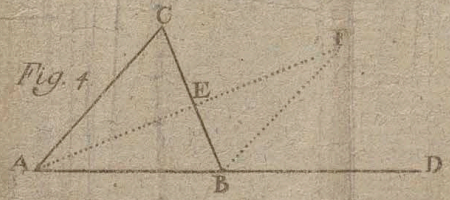


Fig. 5.

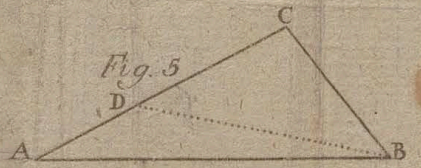


Fig. 6.

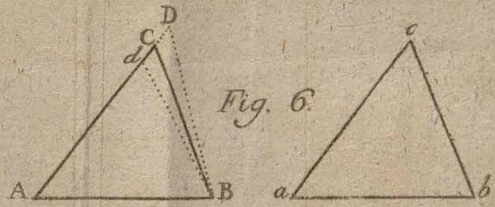


Fig. 7.

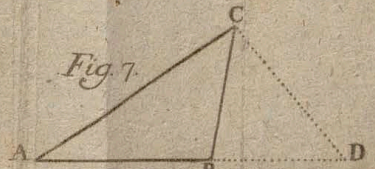


Fig. 8.

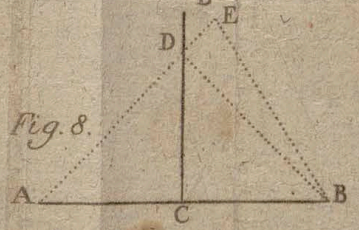
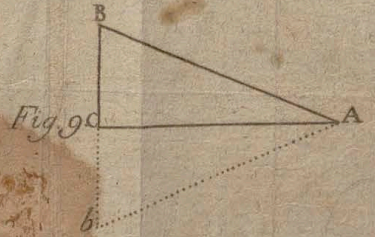


Fig. 9.



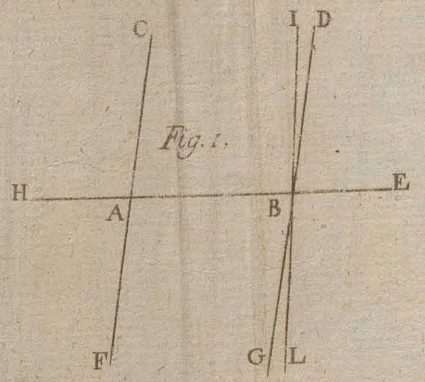


Fig. 1.

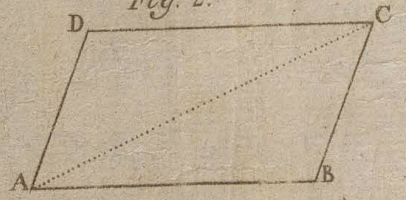


Fig. 2.

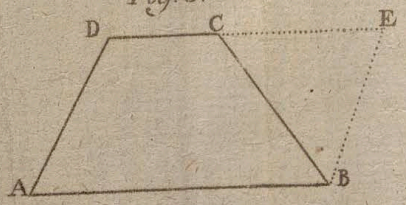


Fig. 3.

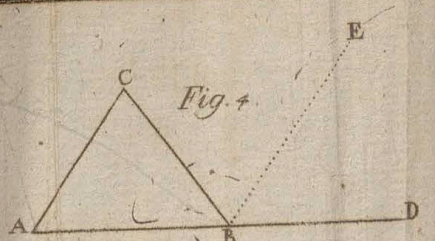


Fig. 4.

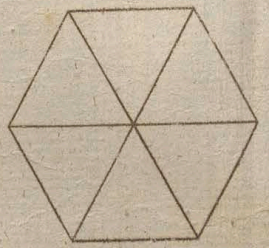


Fig. 5.

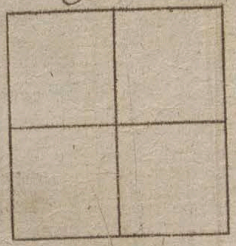


Fig. 6.

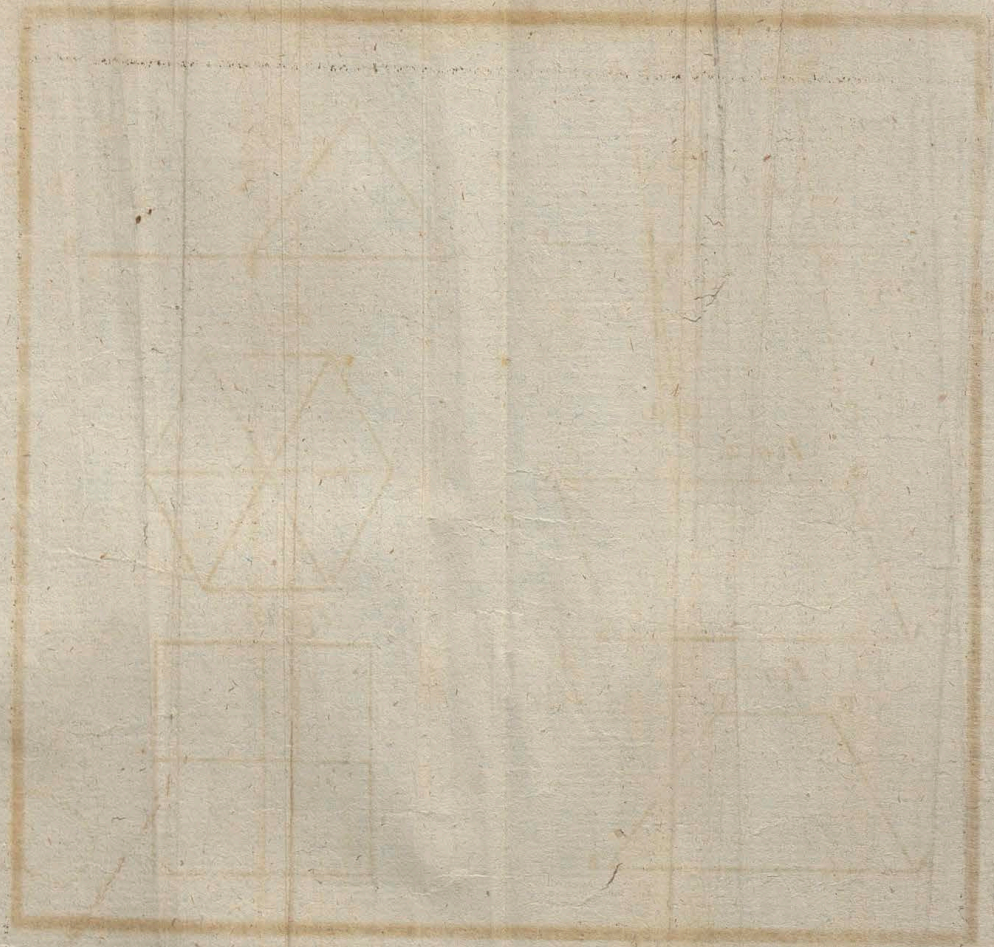


Fig. 1.

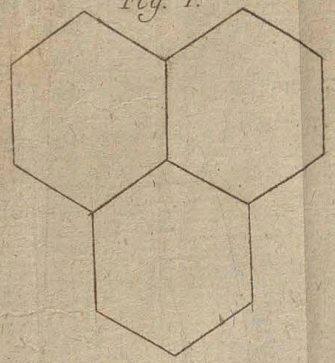


Fig. 3.

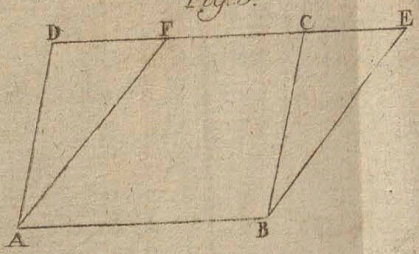


Fig. 4.

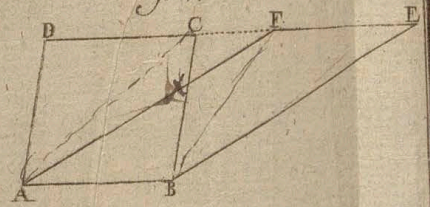


Fig. 2.

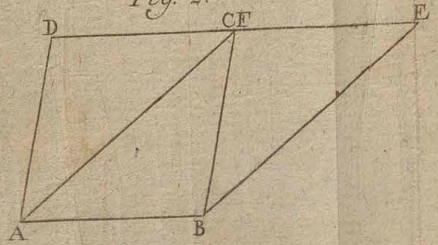


Fig. 5.

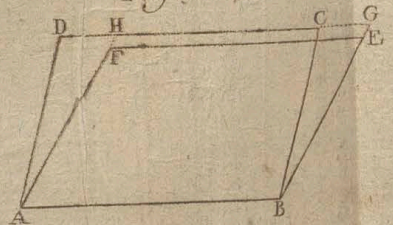


Fig. 1.

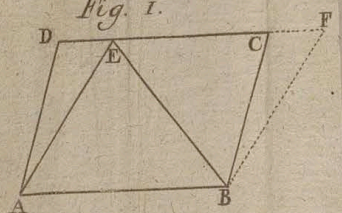


Fig. 2.

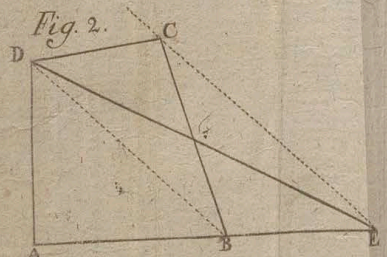


Fig. 3.

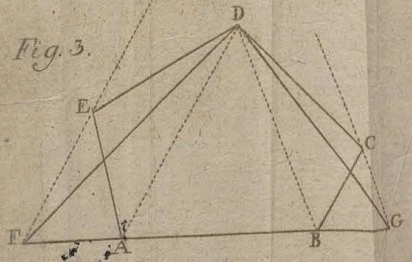


Fig. 4.

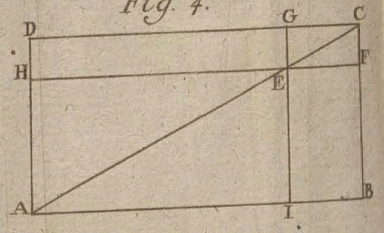


Fig. 5.

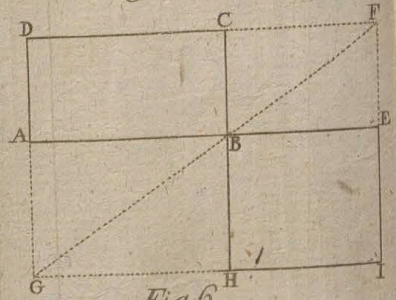


Fig. 6.

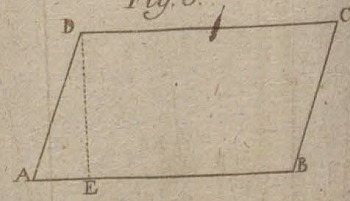


Fig. 1.

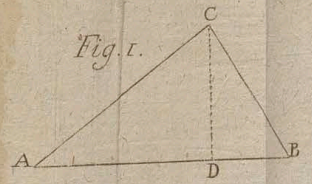


Fig. 2.

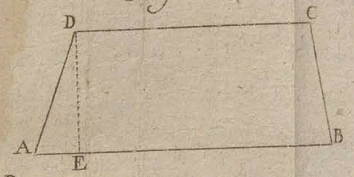


Fig. 3.

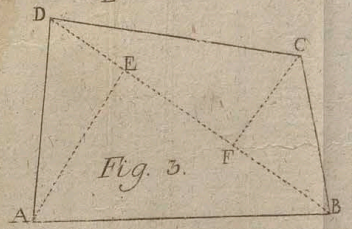


Fig. 4.

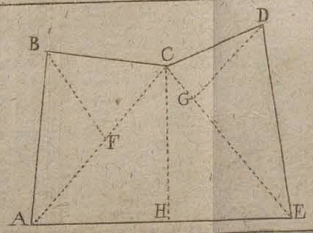


Fig. 5.

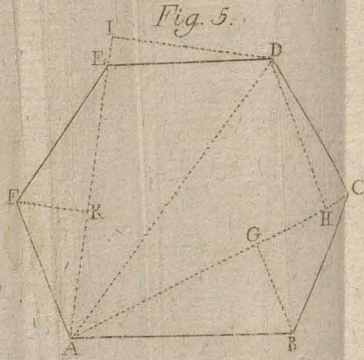


Fig. 6.

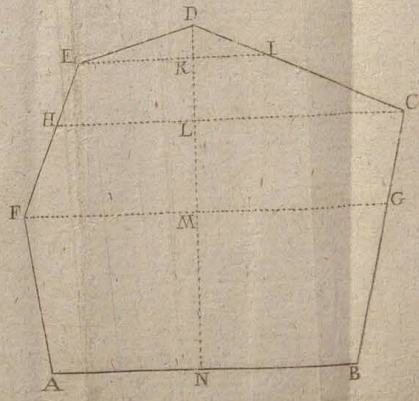


Fig. 1.

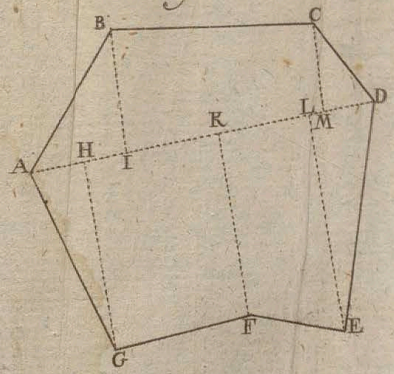


Fig. 2.

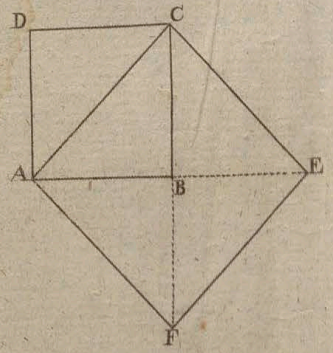


Fig. 3.

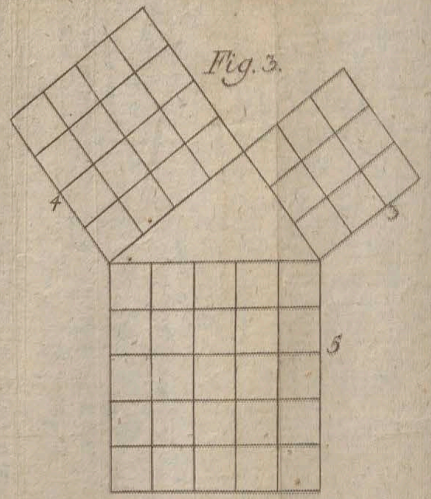


Fig. 4.

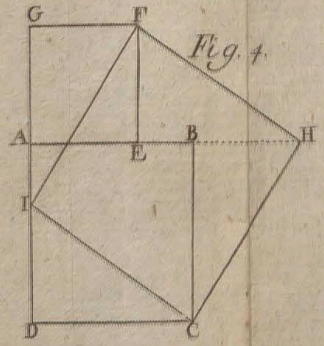


Fig. 1.

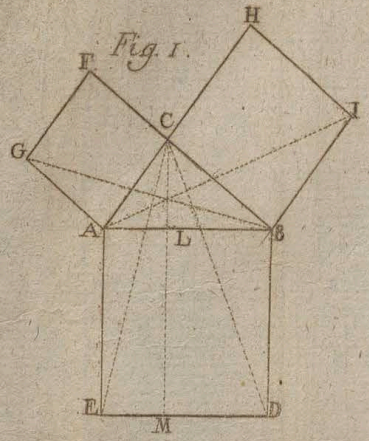


Fig. 2.

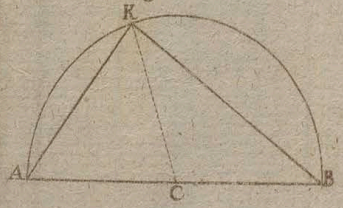


Fig. 3.

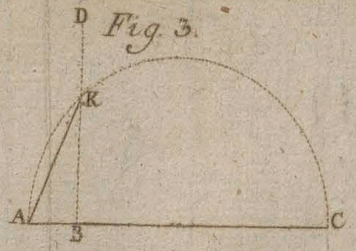


Fig. 4.

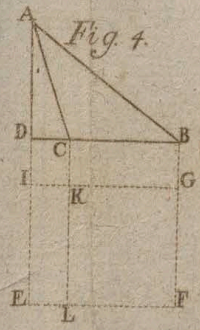
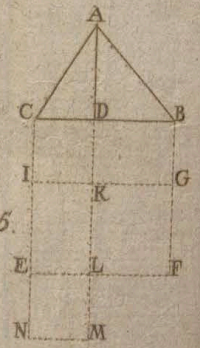


Fig. 5.



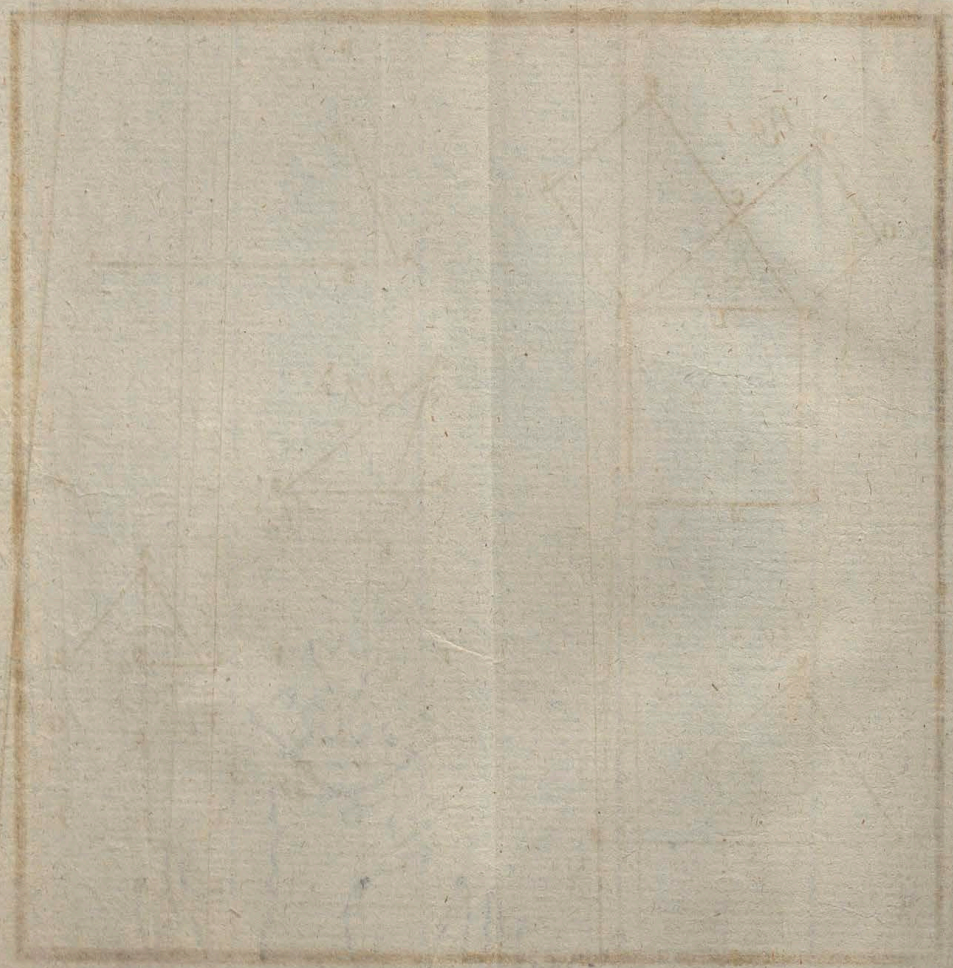


Fig. 1.

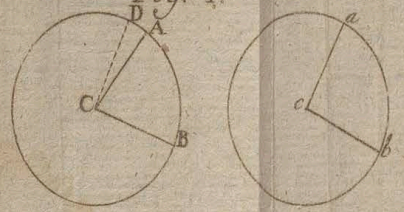


Fig. 2.

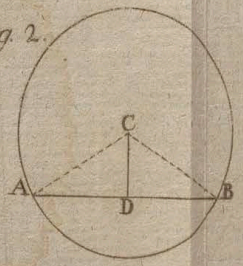


Fig. 3.

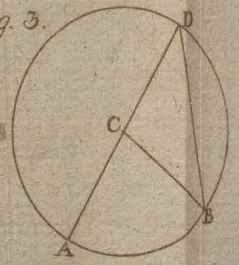


Fig. 4.

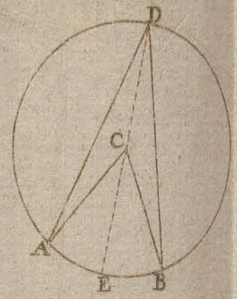


Fig. 5.

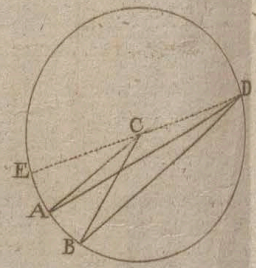
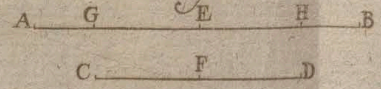


Fig. 6.



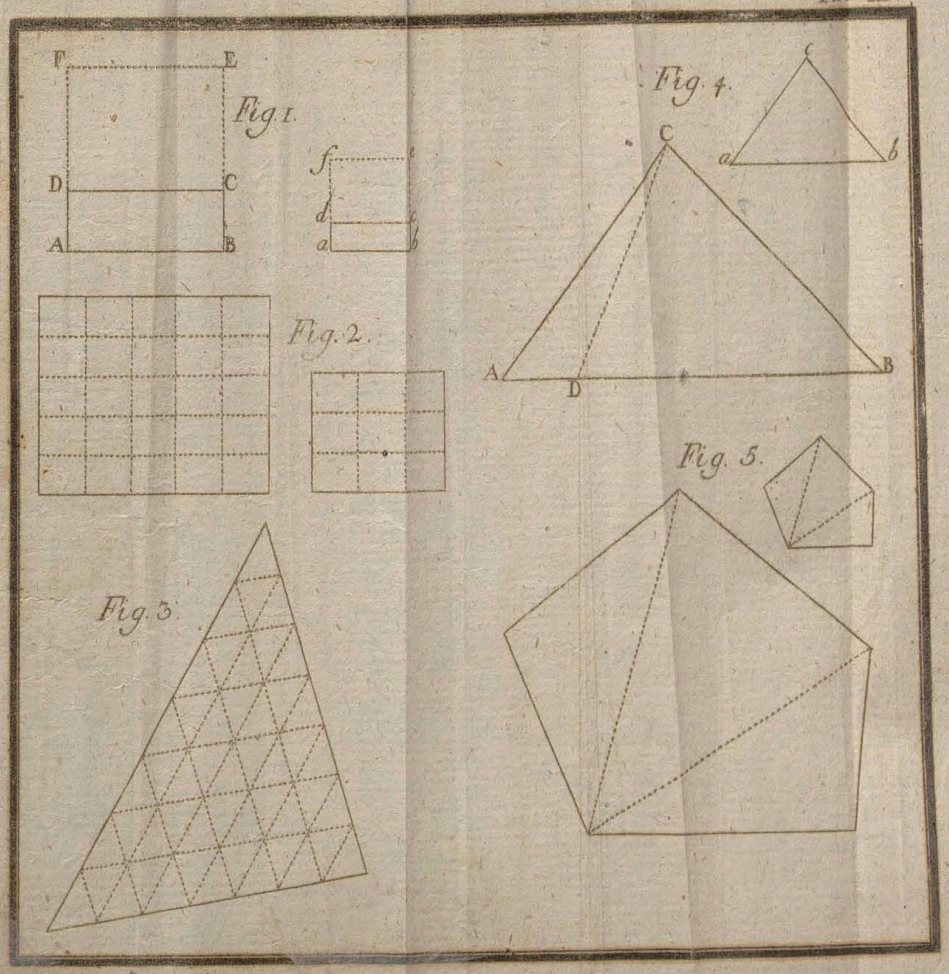

F
E
D
C
A
B
Fig. 1.
f
e
d
c
a
b
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
C
c
a
b
A
D
B
Fig. 5.

Fig. 1.

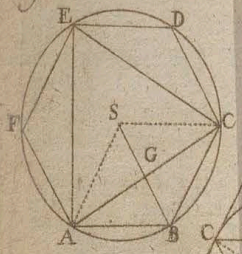


Fig. 2.

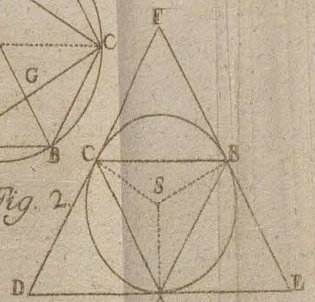


Fig. 3.

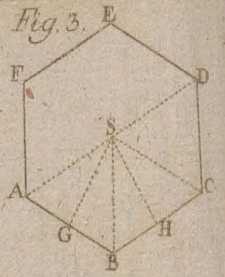


Fig. 4

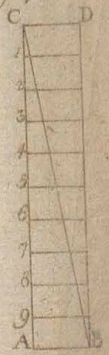
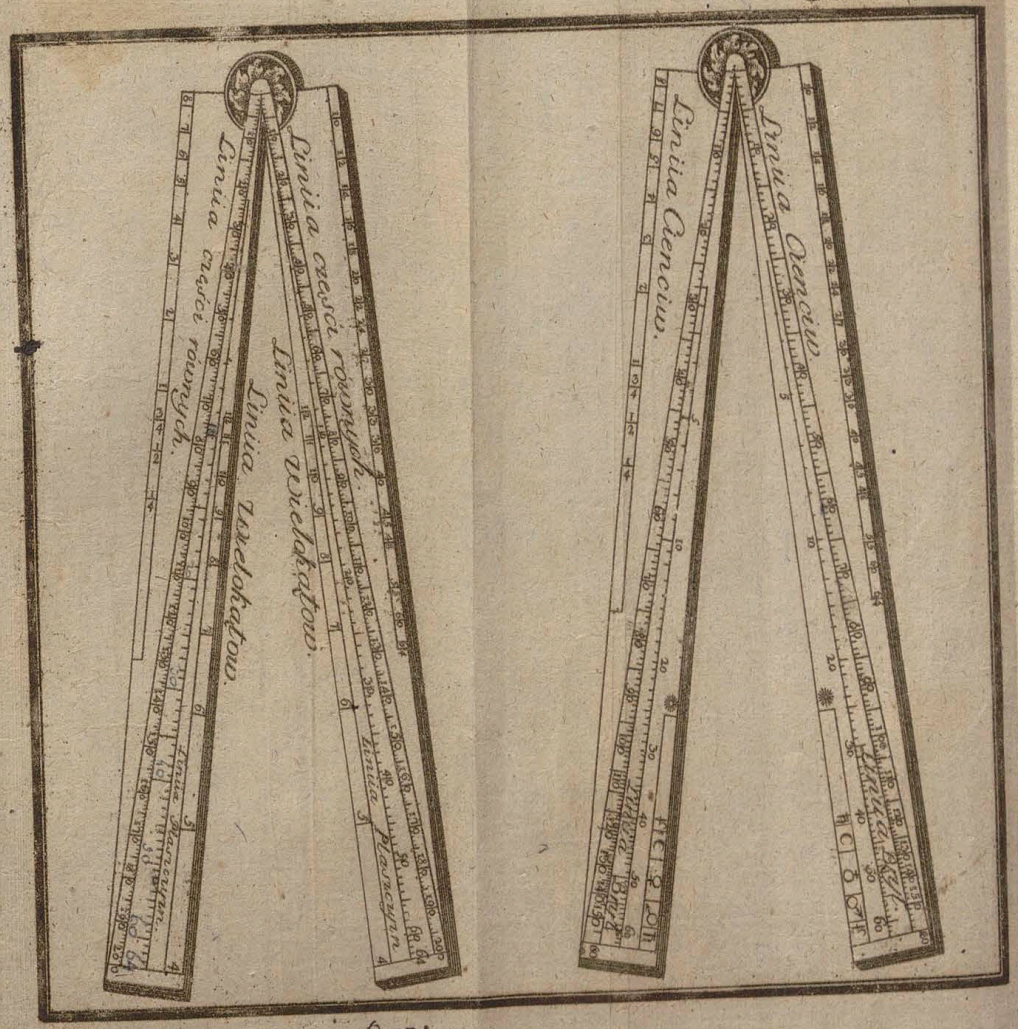


Fig. 5.



Fig. 6.




Linia Cenciw.
Linia czesci rownych.
Linia wzelakatow.
Linia Cenciw.
Linia czesci rownych.
Linia wzelakatow.

Tab. XVIII.

Fig. 1.

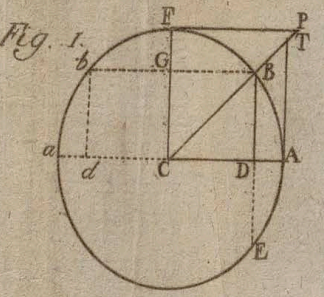


Fig. 2.

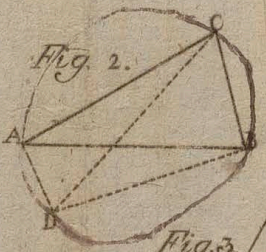


Fig. 3.

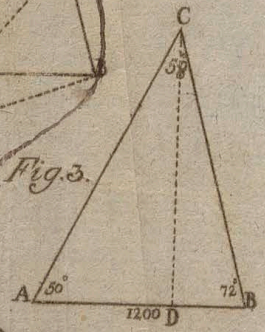


Fig. 4.

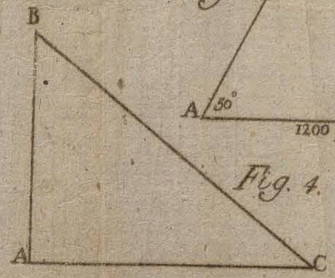


Fig. 5.

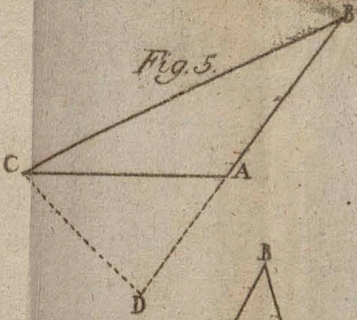


Fig 6.

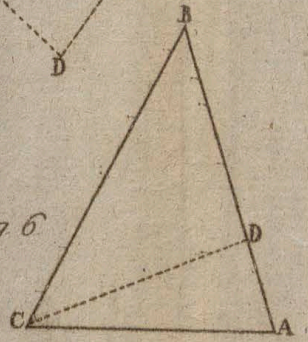
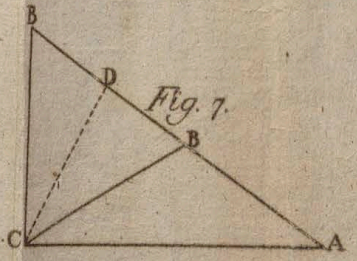


Fig. 7.



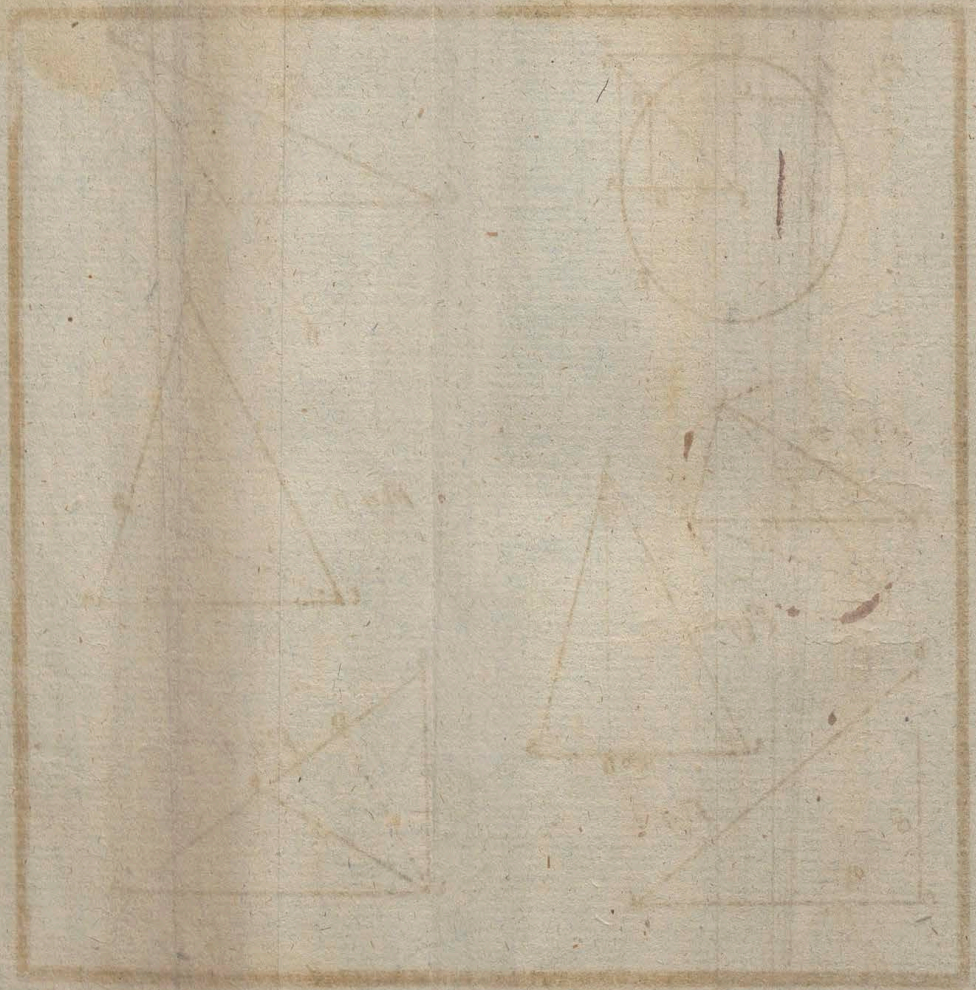


Fig. 1.

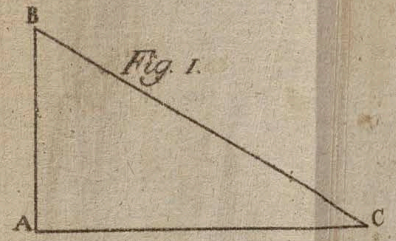


Fig. 2.

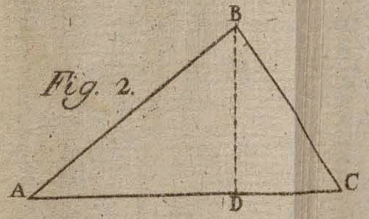


Fig. 3.

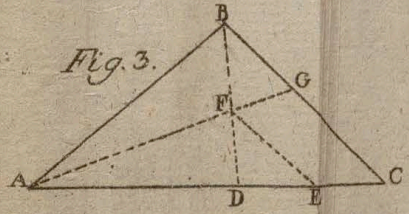


Fig. 4.

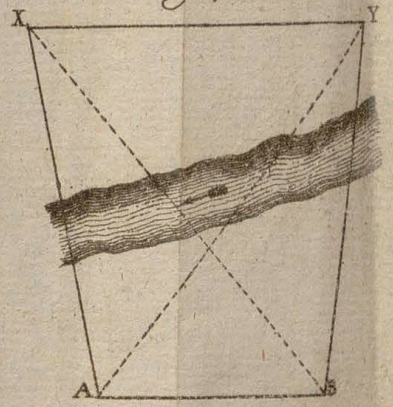
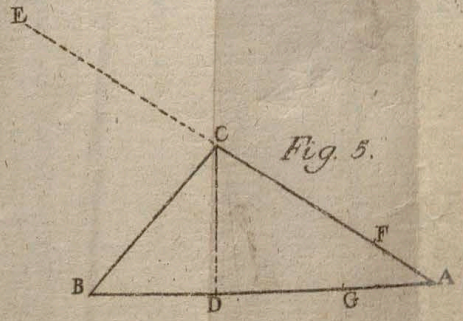


Fig. 5.



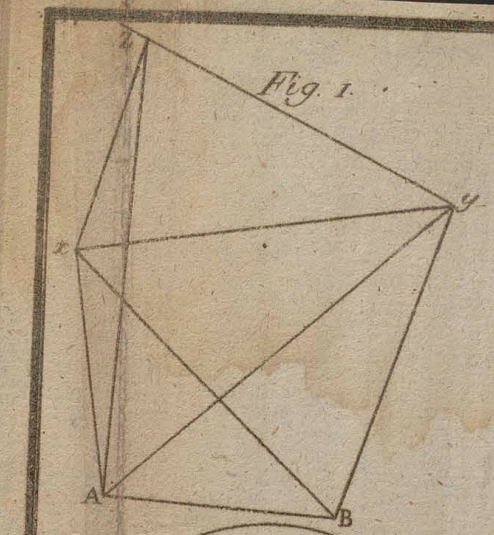


Fig. 1.

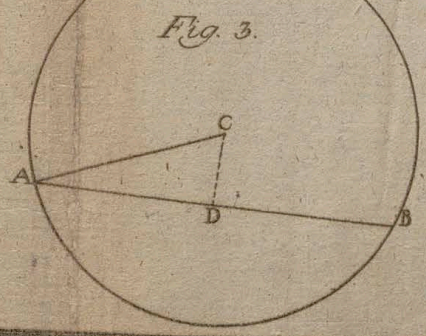


Fig. 3.

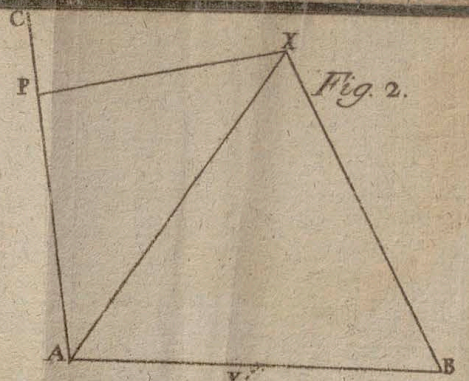


Fig. 2.

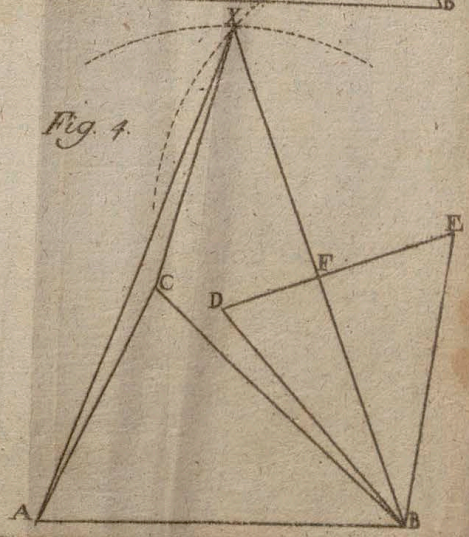
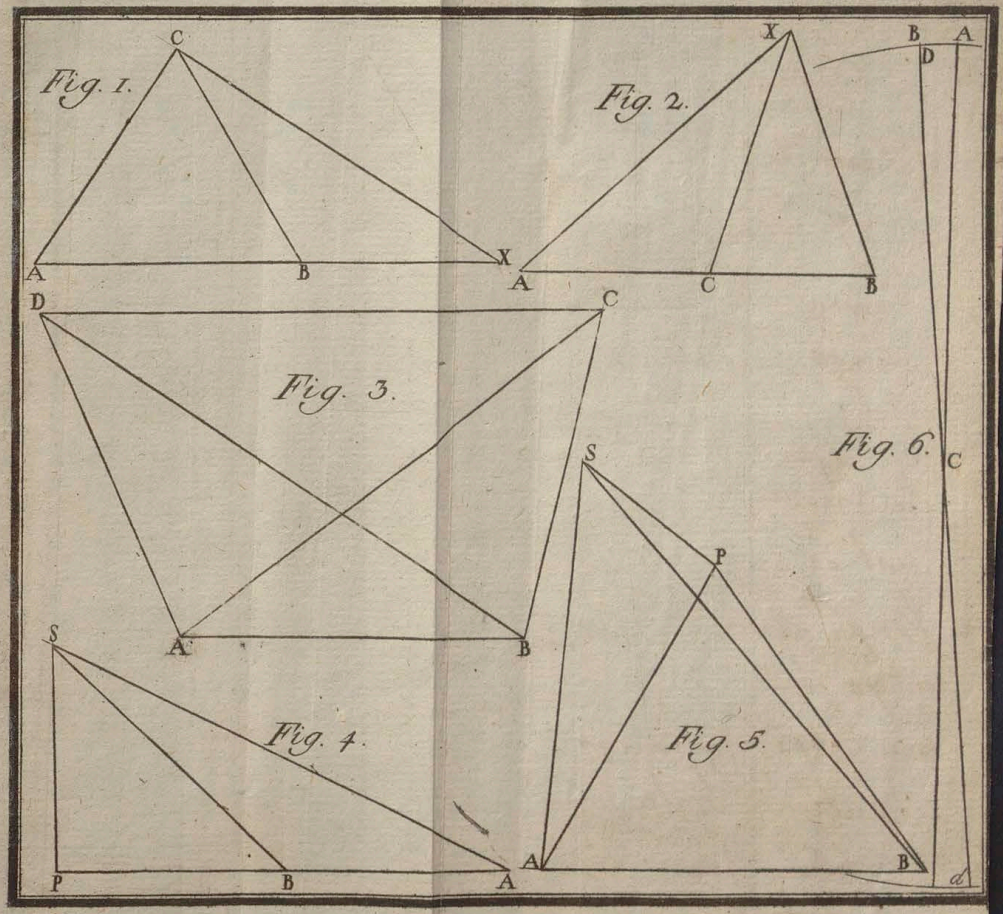


Fig. 4.

BIBLIOTH. UNIV.
JAGELLONICAE

Tab. XXI.


Fig. 1.
C
A
B
X
Fig. 2.
X
B
A
D
A
C
B
Fig. 3.
D
C
A
B
Fig. 6.
S
C
P
S
A
B
Fig. 4.
Fig. 5.
P
B
A
A
B
d

Ignacy Butle
Possessor tey Gwiaz
tnyey Mieżurkowey
Powiatu Wiłkomier
skiego Woiewodz
twa Wileńskiego
taxą Xiążką kupiona
iest od Wielmożnego
Jmci Pana Win
centego przez Jmci Pa
na takież Ignacego
Butlera brata Je
go Ad Jeżeli kto
z prawdziwszey pro
szy cóbąc Dawnie
Sądząc Pa to dz

Biblioteka Jagiellońska
stdr0026400